

UN ESTIMADOR PARA MODELOS CON EXPECTATIVAS RACIONALES QUE EMPLEAN EL ENFOQUE DE McCALLUM

Eugenio Figueroa B.*

EXTRACTO

El enfoque de error-en-las-variables propuesto por McCallum (1976) llegó a ser rápidamente empleado como una herramienta práctica para estimar modelos con expectativas racionales. Sin embargo, el hecho de que, en general, los errores están serialmente correlacionados en modelos que utilizan el enfoque de McCallum limitó grandemente su utilización empírica, dado que los procedimientos estándares para corregir por autocorrelación producen estimadores inconsistentes en un marco Muthiano. El procedimiento de mínimos cuadrados en dos etapas y en dos estados (MC2E2E) -two-steps two-stages least squares (2S2SLS)- propuesto por Cumby, Huizinga y Obstfeld (1983), extiende la aplicabilidad del enfoque de McCallum para estimar modelos con expectativas racionales, aun cuando los residuos estén autocorrelacionados. Este trabajo presenta el estimador de MC2E2E y discute algunas de sus características y propiedades más importantes. Finalmente, discute las nuevas posibilidades de estimación empírica de modelos con expectativas racionales abiertas por la implementación computacional de MC2E2E recientemente desarrolladas por Cumby y Huizinga (1987, 1984).

ABSTRACT

The error-in-invariable approach of McCallum (1976) became widely employed rather quickly as a practical tool for estimating rational expectational models. However, the realization that disturbance terms are, in general, serially correlated in models using McCallum's approach, strongly narrowed its empirical use, since standard procedures to correct for autocorrelation yield inconsistent estimates in a Muthian setting. The two-steps two-stages least squares (2S2SLS) procedure, proposed by Cumby, Huizinga and Obstfeld (1983), extends the applicability of McCallum's approach to estimate rational expectations models with autocorrelated residuals. The paper presents the 2S2SLS estimator, and examines some of its characteristics and more important properties. Finally, the new possibilities to estimate rational expectation models created by the computational implementation of 2S2SLS recently developed by Cumby and Huizinga (1987,1984) are discussed.

* Profesor del Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas, Universidad de Chile. El autor agradece a H.L. Kelejian y R.E. López de la Universidad de Maryland por las ideas con que contribuyeron, a Marc Nerlove de la Universidad de Pennsylvania por sus comentarios a una versión previa presentada al IX Congreso Latinoamericano de la Sociedad de Econometría (Santiago, agosto, 1989), y a dos árbitros anónimos de esta revista por sus útiles comentarios. Los errores son de la exclusiva responsabilidad del autor.

UN ESTIMADOR PARA MODELOS CON EXPECTATIVAS RACIONALES QUE EMPLEAN EL ENFOQUE DE McCALLUM*

Eugenio Figueroa B.

1. INTRODUCCION

El enfoque de error-en-las-variables para tratar el problema de variables no observables, como es el caso típico de las expectativas, fue propuesta por McCallum en 1976 como una herramienta práctica para la estimación de modelos con expectativas racionales, evitando utilizar el método generalizado de los momentos (MGM) de Hansen y Sargent con todas sus dificultades analíticas y computacionales. Desde un punto de vista práctico, esto fue considerado importante por McCallum, dado que los procedimientos de Hansen y Sargent son bastante complejos aun para modelos pequeños y muy simples. Además, la técnica de estimación de estos últimos requiere una exacta especificación de todas las relaciones de comportamiento del modelo (McCallum, 1979). A esto se debe que el enfoque de McCallum, que permitió la estimación por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) de modelos de una sola ecuación con expectativas racionales, llegó a ser bastante empleado en forma más bien rápida.

La comprobación de que los residuos están serialmente correlacionados en modelos con expectativas racionales que utilizan el enfoque de McCallum llevó a Abel, et. al (1979) y McCallum (1977), entre otros, a estimar estos modelos usando métodos estándares para corregir por autocorrelación.

Sin embargo, Flood y Garber (1976) y (Cumby, Huizinga y Obstfeld 'CHO', 1973) demostraron que los procedimientos estándares para corregir por autocorrelación son inapropiados en el marco de expectativas racionales,

**Estudios de Economía*, publicación del Departamento de Economía de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas de la Universidad de Chile, vol. 17, nº1, junio de 1990.

es decir, ellos producen estimaciones inconsistentes de los parámetros. Esta inconsistencia es demostrada por McCallum, (1979), para el caso de una estimación por MCO de un modelo de una sola ecuación que utiliza la transformación de Cochrane-Orcutt para corregir por autocorrelación. La transformación de Cochrane-Orcutt que corrige por la correlación serial de los términos de error, simultáneamente transforma el nuevo residuo en un componente promedio móvil que está correlacionado con los regresores rezagados, lo que hace inconsistentes a los estimadores de MCO. Por otra parte, para un sistema de ecuaciones múltiples CHO (1983) probaron que es inapropiado usar mínimos cuadrados generalizados en dos etapas (MCG2E) para el problema de autocorrelación introducido por el uso del enfoque de error-en-las-variables. En este caso, el residuo corregido (nuevo) resulta estar correlacionado con los instrumentos filtrados.

CHO (1983) desarrollaron una técnica de estimación para usar en modelos con expectativas racionales que utilizan el enfoque de McCallum y tienen por lo tanto residuos autocorrelacionados. El nuevo estimador, que CHO llamaron mínimos cuadrados en dos etapas y en dos estados (MC2E2E), (*two-step two-stage least squares, 2S2SLS*), extiende la aplicabilidad del enfoque de error-en-las-variables de McCallum. Hansen y Sargent (1982, 1981, 1980) demuestran como puede utilizarse variables instrumentales para construir estimadores tipo MGM para los parámetros de sistemas de ecuaciones múltiples. El procedimiento de MC2E2E de CHO puede derivarse como el análogo del MGM para una sola ecuación. Los MC2E2E pueden ser vistos como una extensión de los mínimos cuadrados no lineales en dos etapas de Amemiya (1974) a situaciones en que los residuos son autocorrelacionados y las variables instrumentales son predeterminadas pero no estrictamente exógenas (CHO, 1983).

El procedimiento de MC2E2E propuesto por CHO no es sólo una solución teórica para estimar modelos con expectativas racionales que tienen residuos correlacionados, sino que además es una técnica que ya está disponible para ser utilizada empíricamente. Cumby y Huizinga (1987, 1984) desarrollaron un paquete computacional que pusieron generosamente a disposición del autor para estimar un modelo dinámico de inversión con expectativas racionales (Figuroa, 1989).

El propósito de este trabajo es presentar el estimador de MC2E2E, discutir sus características y propiedades más importantes, y señalar el amplio rango de posibilidades que éste ha abierto para estimar modelos con expectativas racionales que utilizan el enfoque de error-en-las-variables de McCallum. Se discute además el enfoque de McCallum y, en la última sección, se presentan las conclusiones.

2. EL ESTIMADOR DE MC2E2E DE CUMBY, HUIZINGA Y OBSTFELD

Para dar una idea general de lo que son los MC2E2E, es útil analizar un modelo general del cual distintos modelos de expectativas racionales son casos particulares,¹

$$y = Zf(\lambda^*) + \epsilon \quad (1)$$

donde λ^* es un vector $h \times 1$ de parámetros desconocidos y $f(\cdot)$ es una función uno a uno, no necesariamente lineal, que lleva elementos λ del espacio de parámetros a un espacio de igual o mayor dimensión. Se supone que existe un escalar N y un vector fila Q_t , de $H \geq h$ variables instrumentales que tienen la propiedad de

$$E(\epsilon_t | \epsilon_{t-N}, \epsilon_{t-N-1}, \dots, Q_t, Q_{t-1}, \dots) = 0. \quad (2)$$

Esta formulación admite la posibilidad de residuos serialmente correlacionados. Dado que (2) implica

$$E(\epsilon_t | Q_t, Q_{t-1}, \dots) = 0, \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

el supuesto de CHO requiere sólo que los instrumentos sean predeterminados en vez de estrictamente exógenos. Por ejemplo (2) se cumple si ϵ_t sigue un proceso promedio móvil de orden $(N-1)$ y Q_t consiste de variables endógenas rezagadas a $t-N$ o antes. Sin embargo, si (2) se cumple (ϵ_t) no necesita ser un proceso promedio móvil autorregresivo. Las restricciones identificantes que permiten la estimación consistente de λ^* en (1) provienen de (2).

Con el fin de presentar el proceso de estimación de λ^* en (1), premultiplíquese (1) por la matriz traspuesta de la matriz de variables instrumentales Q .

$$Qy = Q'Zf(\lambda^*) + Q'\epsilon. \quad (4)$$

Por la ecuación (3), $E(\bar{\epsilon}_t, Q_t, Q_{t-1}, \dots) = 0$. CHO demuestra que esta última igualdad implica que la minimización de la suma de residuos cuadrados de (4) -mínimos cuadrados no-lineales (MCNL)-proporciona un estimador consistente de λ^* . Sin embargo, dado que $E(Q'\bar{\epsilon}\bar{\epsilon}'Q)$ no es proporcional a la matriz identidad, un estimador Aitken aplicado a (4) es más eficiente que MCNL (CHO, 1983, p. 340-342). Sea $\Omega_T = (1/T)E(Q'\bar{\epsilon}\bar{\epsilon}'Q)$, que se supone positiva

¹ Aquí se sigue de cerca a CHO (1983, pp. 341-347).

definida. Entonces, Ω_T puede expresarse como el producto RR' , donde R es no-singular. Por lo tanto, en el modelo transformado

$$R^{-1}Q'y = R^{-1}Q'Zf(\lambda^*) + R^{-1}Q'\epsilon \quad (5)$$

la matriz covarianza de los residuos es proporcional a la matriz identidad. El estimador Aitken de λ^* minimiza la suma de residuos cuadrados de (5), que puede escribirse como

$$\Theta(\lambda) = [y - Zf(\lambda)]' Q\Omega_T^{-1} Q' [y - Zf(\lambda)] \quad (6)$$

Con esta motivación, CHO (1983) definen su estimador de MC2E2E del vector de parámetros λ^* en (1) como el vector ℓ que minimiza la forma cuadrática

$$\Theta(\lambda) = [y - Zf(\lambda)]' Q\hat{\Omega}^{-1} Q' [y - Zf(\lambda)] \quad (7)$$

donde $\hat{\Omega}$ es un estimador consistente de la matriz positiva definida $\Omega = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) (Q' \epsilon \epsilon Q)$.

En el caso lineal $f(\lambda) = \lambda y$, al examinar las condiciones de primer orden de (7), CHO obtienen que el estimador MC2E2E de λ^* es

$$\ell = [Z' Q\hat{\Omega}^{-1} Q' Z]^{-1} Z' Q\hat{\Omega}^{-1} Q' y \quad (8)$$

El estimador MC2E2E ℓ es un estimador consistente de λ^* , es decir, $\text{plim } \ell = \lambda$. Además, $\sqrt{T}(\ell - \lambda)$ converge en distribución a²

$$N \left\{ Q, \text{plim} \left[\left(\frac{V' Q}{T} \right) \Omega^{-1} \left(\frac{V' Q}{T} \right) \right]^{-1} \right\}$$

donde

$$V \equiv Z \frac{\partial f}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda^*} = Z \left[\frac{\partial f}{\partial \lambda_1} \Big|_{\lambda^*} \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} \Big|_{\lambda^*} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_n} \Big|_{\lambda^*} \right]$$

El primer estado de los MC2E2E obtiene un estimador consistente de Ω , $\hat{\Omega}$. En este estado, los residuos obtenidos en la primera etapa de una estimación del modelo general (1) por mínimos cuadrados no-lineales en dos etapas (MCNL2E), permiten la estimación de una matriz espectral de densidad (*spectral density matrix*), que se utiliza entonces para obtener Ω . Aun cuando ϵ_t sea serialmente dependiente o condicionalmente heterocedástico, los

² Después de probar algunos resultados necesarios, CHO presentan un teorema con estas propiedades asintóticas de los MC2E2E (CHO, 1983).

MCNL2E de Amemiya (1974) siguen siendo consistentes dado que los instrumentos se eligen de manera que $E(Q'\epsilon_t) = 0$ (ver apéndice en CHO, 1983). Sin embargo, en estas situaciones los MCNL2E son asintóticamente ineficientes comparados con los MC2E2E. Por lo tanto, el procedimiento de CHO generaliza los MCNL2E de Amemiya a situaciones en que los residuos están correlacionados y los instrumentos son simplemente predeterminados en vez de estrictamente exógenos. El segundo estado de los MC2E2E corresponde al procedimiento usual de MC2E.

Es importante notar que aunque los MC2E2E son asintóticamente eficientes en una cierta clase de estimadores de variables instrumentales (ver CHO, 1983, pp. 345-347) tienen la desventaja comparados con el MGM de no ser un procedimiento de información completa (*full information procedure*). Sin embargo, algunos investigadores han argumentado que ésta no es una gran desventaja, debido a que los procedimientos de información completa diseminan los posibles errores de especificación en una de las ecuaciones a todo el sistema, haciendo inconsistentes todas las estimaciones.

El hecho de que los MC2E2E permitan el uso de instrumentos predeterminados pero no estrictamente exógenos es también útil, dado que siempre es difícil encontrar instrumentos exógenos apropiados para cualquier set de variables.

3. UTILIZACION DE MC2E2E EN MODELOS CON EXPECTATIVAS RACIONALES

Es un hecho generalmente aceptado que la estimación empírica de modelos que incluyen expectativas racionales en el sentido de Muth, (1961), presenta grandes dificultades, aun en el caso de los modelos más simples (McCallum, 1979). El MGM de Hansen y Sargent (1980, 1982) no sólo es complejo, sino que requiere además de la exacta especificación de todas las relaciones de comportamiento del modelo entre manos (McCallum, 1979). Los MC2E2E permiten obtener estimadores consistentes en modelos de una sola o múltiples ecuaciones con expectativas racionales que utilizan el enfoque de McCallum. El enfoque de McCallum consiste en reemplazar cada variable de expectativas, y por ende no observable, por su correspondiente valor observable (realizado) más un término de error.

La hipótesis de Muth implica que para cualquier variable endógena de un modelo dado, digamos y_t , su valor en el período $t + 1$ según la expectativa de ella existente en el período t , y_{t+1}^e , es igual a su esperanza matemática condicional en Ψ_t , es decir,

$${}_t y_{t+1}^e = E(y_{t+1} | \Psi_t) \quad (9)$$

donde Ψ_t es el set de información disponible al comienzo del período t , conformado de la siguiente manera

$$\Psi_t = (Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots; X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$$

donde Y y X son las matrices de variables endógenas y exógenas, respectivamente, del modelo en cuestión. Esto implica que los agentes económicos tienen al comienzo del período t información sobre los valores de las variables endógenas del modelo en períodos previos, así como sobre los valores de las variables exógenas en el período t y en los períodos previos, (ésta es una de las varias posibilidades de especificación, pero que es suficiente para el propósito de ilustrar el enfoque de McCallum).

En este contexto, y siguiendo a McCallum, (1975a) y Wallis, (1980), el enfoque de McCallum consiste en especificar la hipótesis de expectativas racionales como

$${}_t y_{t+1}^e = y_{t+1} - \eta_{t+1} \quad (10)$$

donde η_{t+1} es un término de error aleatorio con las propiedades clásicas y que no está correlacionado con la información contenida en Ψ_t :

$$E[\eta_{t+1} | \Psi_t] = 0; \quad E[\eta_t \eta'_s] = 0 \quad \forall_t \neq s$$

Esto se debe al resultado general de que una esperanza condicionada no puede estar correlacionada con el error realizado, esto es, $E[E(Y|X) \cdot \{Y - E(Y|X)\}] = 0$, (Nelson, 1975.) La varianza de los errores de predicción es entonces $E[\eta_t \eta'_t] = \Sigma_\eta$. En otras palabras, la hipótesis de expectativas racionales implica que cualquier información disponible en el período t es incorporada por los agentes económicos en este período para formar sus expectativas del valor que tendrán las variables en el período $t+1$. Por lo tanto, no puede haber una relación sistemática entre los términos de error estructurales del modelo, digamos u_t , y el término futuro de error de predicción, η_{t+1} ; es decir, u_t y η_{t+1} son independientes.

Para entender la amplia gama de posibilidades empíricas que abren los MC2E2E para la estimación de modelos con expectativas racionales, basta ver como este tipo de modelos que incorporan la hipótesis de Muth caben dentro del marco especificado por las ecuaciones (1) y (2). Con ese propósito, tómese la siguiente ecuación

$$Y_t = [{}_t x_{t+1} \quad X_t] g(\beta^*) + u_t \quad (11)$$

donde u_t obedece un esquema autorregresivo de primer orden

$$u_t = \rho^* u_{t-1} + v_t \quad E(v_t | I_{t-1}) = 0 \quad (12)$$

donde I_{t-1} es el set de información disponible en el período $t-1$.

El modelo especificado por (11) y (12) envuelve dos tipos de complicaciones,³ a) tiene un error estructural autocorrelacionado y, b) tiene como regresor la expectativa futura x_{t+1} . Sea $\eta_{t+1} = x_{t+1} - E_t x_{t+1}$, entonces se puede cuasi diferenciar (11) para obtener

$$Y_t = [Y_{t-1} \ x_{t-1} \ X_t \ x_t \ X_{t-1}] \begin{bmatrix} \rho^* \\ g(\beta^*) \\ -\rho^* g(\beta^*) \end{bmatrix} + \epsilon_t \quad (13)$$

donde $\epsilon_t = v_t - g_1(\beta^*) \eta_t + \rho^* g_1(\beta^*) \eta_t$ y $g_1(t)$ es la primera entrada de $g(\cdot)$. La ecuación (13) es de la forma de (1), con $\delta^* = (\rho^* \ \beta^*)$. Por (12) y el supuesto de expectativas racionales, $E(\epsilon_t | I_{t-1}) = 0$, la condición (2) se satisface. Cualquier variable observada antes del período t está incluida en I_{t-1} y puede formar parte del set de instrumentos Q_t . Además, mientras ϵ_t y ϵ_{t-1} no necesitan ser autocorrelacionados, $\epsilon_{t-\tau}$ pertenece a I_{t-1} para $\tau > 1$. Esto implica que las restricciones identificantes de (2) están disponibles.

De lo anterior son obvias las múltiples aplicaciones que MC2E2E ofrece para estimar modelos con expectativas racionales. Figueroa (1989a, 1989b) utilizó MC2E2E para estimar un modelo dinámico de inversión y determinación del precio de un activo con expectativas racionales. Esta aplicación para el sector agrícola de EE.UU., es un buen ejemplo de cómo MC2E2E puede ser la técnica de elección para obtener estimadores consistentes en modelos de ecuaciones múltiples con expectativas racionales que utilizan el enfoque de McCallum y tienen residuos autocorrelacionados. Figueroa implementa MC2E2E utilizando el programa computacional desarrollado por Cumby y Huizinga (1984) y puesto generosamente a su disposición por los propios autores. Posteriormente, Cumby y Huizinga (1987) han desarrollado incluso una versión para ser utilizada en computadores personales.

³ Para una discusión de los problemas de estimación en modelos con expectativas racionales ver CHO (1983), Wallis (1980) y McCallum (1977, 1976).

REFERENCIAS

- ABEL, A., R. DORNBUSH, J. HUIZINGA Y A. MARCUS. "Money demand during hyper-inflation"; *Journal of Monetary Economics*, 5: 2-17, enero, 1979.
- AMEMIYA, T. "The nonlinear two-stage least-squares estimators"; *Journal of Econometrics*, 2: 105-110, 1974.
- CUMBY, ROBERT E. Y JOHN HUIZINGA. Two-stop two-stage least squares: User's guide. Mimeógrafo, septiembre, 1987.
- . Two-step two-stage least squares: user's guides. Mimeógrafo, septiembre, 1984.
- CUMBY, ROBERT E Y MAURICE OBSTFELD. "Two-step two-stage least squares estimation in models with rational expectations"; *Journal of Econometrics*, 21: 333-335, septiembre, 1984.
- FIGUEROA, EUGENIO. "A dynamic rational expectations model of investment and asset price determination of a quasi-fixed factor: The case of agricultural machinery and equipment in the U.S., 1948-1983". Ph. D. Dissertation; University of Maryland, College Park, Maryland, USA, 1989a.
- . "Two-step two-stage least squares: A useful and recently available estimating procedure for rational expectation models with autocorrelated disturbances". Trabajos al IX Encuentro Latinoamericano de la Sociedad Econométrica. Santiago, Chile, 1-4 agosto, 1989, 1989b.
- FLOOD, R. Y P.M.GARBER. "A pitfall in estimation of models with rational expectations"; *Journal of Monetary Economics*, 6: 433-435, marzo, 1979.
- HANSEN LARS PETER Y THOMAS J. SARGENT. "Instrumental variables procedures for estimating linear rational expectations models", *Journal of Monetary Economics*, 9: 7-46, 1982.
- . "Linear rational expectations models for dynamically interrelated variables", in rational expectations and econometric practice, vol. 1, edited by Robert E. Lucas, Jr. and Thomas J. Sargent: The University of Minnesota Press, Minneapolis, Minnesota, 1981.
- . "Formulating and estimating dynamic linear rational expectations models"; *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 2, 1980.
- McCALLUM, B.T. "Topics concerning the formulation, estimation, and use of macroeconomic models with rational expectations"; in American statistical association, proceedings of the business and economic statistics section, 65-72. Washington, D.C., 1977.
- . "The role of speculation in the Canadian forward exchange market"; *Review of Economics and Statistics*, 59: 145-151, mayo, 1977.
- . "Rational expectations and the natural rate hypothesis: Some consistent estimates"; *Econometrica*, 44(1): 43-52, enero, mayo 1976a
- . "Rational expectations and the estimation of econometric models: An alternative procedure"; *International Economic Review*, 17(2): 484-90, 1976b.

MUTH, JOHN F. "Rational expectations and the theory of the price movements": *Econometrica*, 29(6), 1961.

NELSON, CHARLES R. "Rational expectations and the estimation of econometric models"; *International Economic Review*, (16)3: 555-61, 1975.

WALLIS, KENNETH F. "Econometric implications of the rational expectations hypothesis"; *Econometrica*, 48(1): 50-73, enero, 1980.

EXTRACTO

Los cuestionamientos académicos planteados con el advento de la hipótesis de expectativas racionales, son dos propuestos a los que se refieren los autores: el primero es la existencia de relaciones entre los cambios de variables reales (empleo y salario) y algunas variables macroeconómicas (como el PIB) en Chile en el período 1960-1980. Los autores, utilizando los datos de las fluctuaciones económicas y los datos de desempleo e inflación, encuentran que la hipótesis de expectativas racionales es más consistente con los datos que la hipótesis de expectativas racionales. Los resultados muestran que la movilidad es más sensible a los cambios de salarios y que la movilidad es más sensible que la oferta de trabajo. En general, la oferta de trabajo es la variable económica que muestra una fuerte relación con las fluctuaciones de los indicadores de actividad económica de corto y largo plazo del trabajo.

ABSTRACT

The questions addressed in this article are how aggregate economic changes are related to the health of a population, and how these three variables are. The relationships between the post-war fluctuations in the economy (aggregate production, employment, and wages) and some health indicators (mortality, morbidity, and disability) are analyzed in Chile, 1960-1980. In general, a negative correlation is found between the economic fluctuations and those of the health indicators. Although some indicators, like infant mortality and unemployment, display very moderate short-term changes, they have been linked to the economic fluctuations during the period under study. Mobility and malnutrition appear to be most sensitive to economic changes than normally. The unemployment variable is the most closely associated with the fluctuations in the health indicators. Some policy implications are stated.

* El presente trabajo fue realizado dentro del marco del programa de desarrollo y estudio de PDEALC, el cual fue respaldado por el Departamento de Trabajo Nº 341, Sistema de IFE.

** Centro Latinoamericano de Demografía (CELADE), Calle 10, Santiago, Chile.