Elementos de Economía Matemática

Juan Pablo Torres-Martínez

Profesor Titular, Universidad de Chile

Febrero, 2012

CONTENIDOS

CAPITULO I

Conceptos Básicos de Topología y Análisis Convexo

A seguir introduciremos algunos conceptos topológicos en $\mathbb{R}^n$: conjuntos abiertos, conjuntos cerrados y compacidad.

Definición 1. Un conjunto $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ es *abierto en* A si para cada $x_0 \in B$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\{x \in A : \|x - x_0\| < \epsilon\}$ está contenido en B.

Un conjunto abierto en $A \subset \mathbb{R}^n$ también es llamado de *conjunto abierto relativo al conjunto* A, o *abierto relativo* (cuando no existe posibilidad de confusión). Si $A = \mathbb{R}^n$, nos referimos a un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ simplemente como *conjunto abierto*.

Note que, si B es abierto en A no necesariamente B es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, $B = (0, 1]$ es abierto en $[0, 1]$, pero no es abierto en $\mathbb{R}$.

Por definición, todo conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto en A. Además, el conjunto vacío es abierto en cualquier $A \subset \mathbb{R}^n$.

En general, dado $A \subset \mathbb{R}^n$, un conjunto $B \subset A$ es abierto en A si y solamente si existe un conjunto abierto $C \subset \mathbb{R}^n$ tal que $B = A \cap C$.

Sea $\mathbb{A}_n = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \,\text{es abierto}\}$. Para cada $\epsilon > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, denote por $B_\epsilon(x_0)$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \epsilon\}$, el cual llamaremos de *bola abierta de centro* x_0 *y radio* ϵ. De la misma forma, dado $A \subset \mathbb{R}^n$, defina la bola abierta en A, de centro $x_0 \in A$ y radio $\epsilon > 0$, como $B_\epsilon(x_0; A) := \{x \in A : \|x - x_0\| < \epsilon\}$. Note que, $B_\epsilon(x_0) = B_\epsilon(x_0; \mathbb{R}^n)$.

Proposición 1. Para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, para cada $(\epsilon, x_0) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n$, $B_\epsilon(x_0; A)$ es un subconjunto abierto de A.

Algunas propiedades de los conjuntos abiertos:

(1) Dada una familia de conjuntos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathbb{A}_n$, donde Λ es una colección arbitraria de índices, el conjunto $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es abierto. De hecho, dado $x_0 \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ existe $\lambda(x_0) \in \Lambda$ tal que $x_0 \in A_{\lambda(x_0)}$. Así, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_0) \subset A_{\lambda(x_0)} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$.

(2) Cuando el conjunto de índices Λ es finito, la intersección de los conjuntos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ está en $\mathbb{A}_n$. Para demostrar esto, considere un vector $x_0 \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Como para cada $\lambda \in \Lambda$

existe $\epsilon_\lambda > 0$ tal que $B_{\epsilon_\lambda}(x_0) \subset A_\lambda$, sigue que $B_\epsilon(x_0) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, donde $\epsilon := \min_{\lambda\in\Lambda} \epsilon_\lambda$.

La intersección arbitraria de conjuntos abiertos no necesariamente es un conjunto abierto. Como ejemplo, considere la familia $\left\{\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right); n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{A}_1$. A pesar de cada conjunto ser abierto, la intersección de todos ellos, $[0,1]$, no lo es.

Definición 2. Un conjunto $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ es *cerrado en* A si el complemento de B en A, $A \setminus B$, es abierto en A.

Sigue que B es cerrado (en $\mathbb{R}^n$) si y solo si $B^c \subset \mathbb{A}_n$.

Algunas propiedades de los conjuntos cerrados se pueden deducir de lo que ya sabemos sobre los conjuntos abiertos. De hecho, la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado. La unión finita de conjuntos cerrados también es un conjunto cerrado.[1] No así la unión arbitraria de conjuntos cerrados: la unión de los conjuntos de la familia $\left\{\left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]; n \in \mathbb{N}\right\}$, que es igual al conjunto $(0,1)$, no es un conjunto cerrado.

Definición 3. Una secuencia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es convergente si existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que, $\|x_n - \overline{x}\| < \epsilon$, $\forall n \geq N_\epsilon$. El vector $\overline{x}$ es llamado de límite de la secuencia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$.

Dejamos al lector verificar que el límite de una secuencia en $\mathbb{R}^n$, cuando existe, es único.

Proposición 2. Un conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si toda secuencia convergente de B tiene su límite en B.

Demostración. Suponga que B es cerrado y fije una secuencia convergente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$. Por definición, existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x_n - \overline{x}\|$ tiende para cero cuando n aumenta. Suponga que $\overline{x} \notin B$. Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\overline{x}) \subset B^c$. Esto implica que, para n suficientemente grande, x_n no está en B, una contradicción.

Recíprocamente, suponga que toda secuencia convergente de B tiene su límite en B. Si B no es cerrado, entonces B^c no es abierto. Esto es, para algún $\overline{x} \in B^c$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B$ tal que $\|x_n - \overline{x}\| < \frac{1}{n}$. Luego, encontramos una secuencia convergente de B

[1] Demuestre estas dos propiedades.

que tiene su límite en B^c, una contradicción. □

Recuerde que una función $f : U \to \mathbb{R}^m$, definida en un subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es continua en un punto $x_0 \in U$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in U$, $\|x - x_0\| < \delta$ implica que $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$. Dado $A \subset \mathbb{R}^m$, nos referimos al conjunto $f^{-1}(A) := \{x \in U : f(x) \in A\}$ como la *preimagen de A por f*. A continuación mostraremos como la continuidad de funciones se relaciona con los conceptos de conjunto abierto y conjunto cerrado.

Proposición 3. Una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en $x_0 \in U$ si y sólo si la preimagen por f de cada conjunto $A \in \mathbb{A}_m$ que contiene al vector $f(x_0)$ es un subconjunto de U que contiene una vecindad de x_0.

Demostración. Suponga que f es continua en $x_0 \in U$. Dado $A \subset \mathbb{R}^m$ abierto tal que $f(x_0) \in A$. Suponga que no existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_0; U) \subset f^{-1}(A)$. Entonces, existe una secuencia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n}$ y $f(x_n) \notin A$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x_0, la continuidad de f nos asegura que $f(x_n)$ es convergente para $f(x_0)$. Como A^c es cerrado, llegamos a que $f(x_0) \in A^c$. Esto es, $x_0 \notin f^{-1}(A)$, una contradicción.

Recíprocamente, fijado $x_0 \in U$, asuma que la pre-imágen de cada conjunto $A \in \mathbb{A}_m$ que contiene al vector $f(x_0)$ es un subconjunto de U que contiene una vecindad de x_0. Como para cada $\epsilon > 0$ el conjunto $B_\epsilon(f(x_0))$ es abierto, concluimos que existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in U$ y $\|x - x_0\| < \delta$ entonces $x \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$, esto es, $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$. Así, f es continua en x_0. □

Como el conjunto vacío es abierto, sigue de la proposición anterior que una función $f : U \to \mathbb{R}^m$ es continua en su dominio $U \subset \mathbb{R}^n$ si y sólo si la preimagen por f de todo conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto abierto de U.

Si $A \subset \mathbb{R}^m$ es cerrado y $f : U \to \mathbb{R}^m$ es continua, entonces $f^{-1}(A^c)$ es abierto en U. Esto es lo mismo que afirmar que $f^{-1}(A)$ es cerrado en U. Por otro lado, si para cada conjunto cerrado $A \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(A)$ es cerrado en U, entonces para cada abierto $B \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(B) = (f^{-1}(B^c))^c$ es abierto en U. Esto es, f es continua en U.

Por lo tanto, una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si y solamente si la preimagen de cada conjunto cerrado $A \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto cerrado en U.

La continuidad de una función nada tiene que ver con las propiedades de la imagen por f de los conjuntos abiertos o cerrados. Si una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua, entonces dado un conjunto A abierto (o cerrado) en U, $f(A)$ puede ser abierto, puede ser cerrado, o bien no tener ninguna de estas propiedades topológicas.[2]

Definición 4. Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es *compacto* si para toda familia de conjuntos abiertos $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tal que $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, existe un subconjunto *finito* $\Lambda^* \subset \Lambda$ tal que $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda^*} A_\lambda$.

Esto es, un conjunto K es compacto cuando toda *cobertura abierta* de K posee una *subcobertura finita*. Así, una forma de mostrar que un conjunto no es compacto es encontrando una cobertura abierta de él que no tenga una subcobertura finita. Por ejemplo, $[0,1)$ no es compacto, ya que la cobertura abierta $\left\{\left(-1, 1-\frac{1}{n}\right); n \in \mathbb{N}\right\}$ no tiene una subcobertura finita. De la misma forma, el conjunto $[0,+\infty)$ no es compacto, ya que $\{(-1,n); n \in \mathbb{N}\}$ no tiene una subcobertura finita. El problema de estos conjuntos es que dejan "abierto" el extremo derecho y, por lo tanto, se puede construir una cobertura que avanza lentamente en esa dirección, bloqueando la existencia de una subcobertura finita. En el primer caso, el extremo derecho está "abierto" debido a que el conjunto no es *cerrado*, en el segundo caso, por el conjunto no ser *limitado*.

Proposición 4. La siguientes propiedades son equivalentes:

(a) $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto.
(b) $K \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado.
(b) Toda secuencia en $K \subset \mathbb{R}^n$ tiene una subsecuencia convergente en K.

Proposición 5. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Si $K \subset U$ es compacto, entonces $f(K)$ es compacto.

Demostración. Fije una cobertura abierta de $f(K)$, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Esto es, una familia de conjuntos abiertos tal que $f(K) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Es inmediato verificar que $K \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$. Esto es, $\{f^{-1}(A_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cobertura abierta de K. Luego, existe una subcobertura finita $\{f^{-1}(A_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda^*}$, con $\Lambda^* \subset \Lambda$. así, $f(K)$ puede ser cubierto por un

[2]Le sugerimos al lector dar ejemplos de cada uno de los casos.

número finito de elementos de $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Esto es, $f(K)$ es compacto. □

Dada una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diremos que f alcanza su máximo (resp. mínimo) en U, si existe $\overline{x} \in U$ tal que $f(\overline{x}) \geq f(x)$ (resp. $f(\overline{x}) \leq f(x)$), para todo $x \in U$.

Corolario. Toda función continua $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en un conjunto compacto K alcanza su máximo y su mínimo en K.

Demostración. Como f es continua, $f(K)$ es compacto. Así, es cerrado y acotado. Por ser acotado, existen $\underline{z} := \inf\{z : z \in f(K)\}$ y $\overline{z} := \sup\{z : z \in f(K)\}$. Por definición de ínfimo y supremo, hay secuencias $\{z_n^i\}_{n\in\mathbb{N}} \subset f(K)$ y $\{z_n^s\}_{n\in\mathbb{N}} \subset f(K)$ que convergen, respectivamente, para $\underline{z}$ y $\overline{z}$. Como $f(K)$ es cerrado, $\underline{z}$ y $\overline{z}$ están en $f(K)$, lo que concluye la demostración. □

Una propiedad que utilizaremos a menudo en nuestras aplicaciones será la convexidad de conjuntos. Recordemos que un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es *convexo* si para cada par de elementos $x_1, x_2 \in C$, los vectores $\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\}_{\lambda\in(0,1)}$ están en C.

El siguiente resultado enumera algunas propiedades de los conjuntos convexos.

Proposición 6.

(a) Los conjuntos $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son convexos.
(b) Dados A y B convexos en $\mathbb{R}^n$, $A + tB := \{a + tb : a \in A, b \in B\}$ es convexo para cada $t \in \mathbb{R}$.
(c) Intersección arbitraria de conjuntos convexos es un conjunto convexo.
(d) Todo espacio vectorial es convexo.
(e) Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo entonces la *clausura* de C,

$$\overline{C} := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C \,\text{convergente para}\, x\},$$

es un conjunto convexo.
(f) Dado un conjunto C, sea $\dot{C} := \{x \in C : \exists \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \subset C\}$ el *interior* del conjunto C. Entonces, si C es convexo, el interior de la clausura del conjunto C está contenido en C.

La propiedad (f) será fundamental para probar el proximo resultado, y sólo es válida para conjuntos convexos. De hecho, si $C = (0,1) \cup (1,2)$, entonces $\dot{\overline{C}} = (0,2) \nsubseteq C$.

Teorema de Separación de Convexos
Sean A y B dos conjuntos convexos, disjuntos y diferentes de vacío en $\mathbb{R}^n$. Entonces, siempre existe $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $p \cdot a \leq p \cdot b$, para cada para $(a,b) \in A \times B$.

Si A es cerrado y B es compacto, entonces el vector p puede ser escogido de tal forma que, para algún $c \in \mathbb{R}$, $p \cdot a < c < p \cdot b$, $\forall (a,b) \in A \times B$.

Demostración. Si A es cerrado, la función $f : B \to \mathbb{R}$ dada por $f(b) = \min_{a \in A} \|b - a\|$ está bien definida y es continua (compruebe estas propiedades). Además, cuando B es compacto, existe $\underline{b} \in B$ tal que $f(b) \geq f(\underline{b})$. Sea $y_{\underline{b}} \in A$ tal que $f(\underline{b}) = \|\underline{b} - y_{\underline{b}}\|$. Como A y B son disjuntos, el vector $p = \frac{\underline{b} - y_{\underline{b}}}{\|\underline{b} - y_{\underline{b}}\|}$ esta bien definido y tiene norma igual a uno.

Note que $0 < p \cdot p = p \cdot \frac{\underline{b} - y_{\underline{b}}}{\|\underline{b} - y_{\underline{b}}\|}$. Luego $p \cdot \underline{b} > p \cdot y_{\underline{b}}$. Así, para completar la demostración de esta parte del teorema es suficiente probar que, para cada $(a,b) \in A \times B$, $[p \cdot b \geq p \cdot \underline{b}] \wedge [p \cdot y_{\underline{b}} \geq p \cdot a]$.

Fije $a \in A$ y considere la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, con $g(\lambda) = \|\underline{b} - (\lambda a + (1 - \lambda) y_{\underline{b}})\|^2$. Dado que A es convexo, la función g tienen un mínimo en $\lambda = 0$. Así, $g'(0) \geq 0$. Esto es, $2(\underline{b} - y_{\underline{b}}) \cdot (y_{\underline{b}} - a) \geq 0$. Luego, $p \cdot y_{\underline{b}} \geq p \cdot a$. Finalmente, fijando $b \in B$ defina la función $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ como $h(\lambda) = \|y_{\underline{b}} - (\lambda b + (1 - \lambda)\underline{b})\|^2$. Dado que B es convexo, la función h tienen un mínimo en $\lambda = 0$. Así, $h'(0) \geq 0$. Esto es, $-2(\underline{b} - y_{\underline{b}}) \cdot (\underline{b} - b) \geq 0$, lo que concluye la demostración.

Si A y B son convexos, diferentes de vacío y disjuntos, entonces el conjunto $C = A - B$ es convexo, diferente de vacío y no contiene el vector cero. Así, tenemos dos posibilidades: (i) La clausura de C es disjunta del conjunto $\{0\}$; o (ii) El vector cero pertenece a la clausura de C.

Caso (i). Aplicando los resultados previos, sabemos que existe $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $p \cdot c < 0$ para cualquier vector $c \in \overline{C}$. En particular, $p \cdot a < p \cdot b$, $\forall (a,b) \in A \times B$.

Caso (ii). En esta situación, $0 \notin \dot{\overline{C}}$ (vea el ítem (f) en la proposición previa). Por lo tanto, existe una secuencia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^c$ que converge para cero cuando n va para infinito. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ va a existir un vector p_n de norma uno tal que $p_n \cdot a < p_n \cdot b$, $\forall (a,b) \in A \times B$.

Como la secuencia $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está en un compacto, existe al menos una subsecuencia convergente. Esto es, existe un vector p de norma uno tal que $p \cdot a \leq p \cdot b$, $\forall (a,b) \in A \times B$. $\square$

El Teorema de Separación de Convexos tiene varias aplicaciones en economía y en matemática. Se puede utilizar para probar algunas versiones del Teorema de Kuhn-Tucker, será útil para caracterizar los precios de activos financieros en la ausencia de oportunidades de arbitraje (vea ejercicio (19) al final del capítulo) y será el ingrediente matemático esencial en la prueba clásica del Segundo Teorema del Bienestar Social (ver último capítulo).

En algunas aplicaciones necesitaremos que el conjunto de vectores que maximiza una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sea convexo. Note que, si dos vectores x_1 y x_2 maximizan f en U, para que cada vector $z_\lambda := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, con $\lambda \in (0,1)$, también sea un óptimo para f en U es necesario y suficiente que las siguientes condiciones sean satisfechas: (i) z_λ esté en U; y (ii) $f(z_\lambda) \geq \min\{f(x_1); f(x_2)\}$.

La condición (i) se consigue si U es convexo. Cuando una función satisface la condición (ii) en todo su dominio, diremos que es *cuasicóncava* en U.

Definición 5. Una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es *cuasicóncava* en U si, para todo par $(x_1, x_2) \in U \times U$, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{f(x_1); f(x_2)\}$ cada vez que $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in U$ y $\lambda \in (0,1)$.

Proposición 7. Dada una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde U es convexo, f es cuasicóncava en U si y sólo si, para cada $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $U_a := \{x \in U : f(x) \geq a\}$ es convexo.

Demostración. Suponga que f es cuasicóncava en U. Dado $a \in \mathbb{R}$, si U_a es vacío entonces es convexo. Caso contrario, dados dos vectores x_1 y x_2 en U_a, para cada $\lambda \in (0,1)$, $z_\lambda := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in U$ y $f(z_\lambda) \geq \min\{f(x_1); f(x_2)\} \geq a$. Luego, para cada $\lambda \in (0,1)$, $z_\lambda \in U_a$. Esto es, U_a es convexo. Recíprocamente, asuma que el conjunto U_a es convexo para cada $a \in \mathbb{R}$. Dados dos vectores en U, x_1 y x_2, es claro que $\{x_1, x_2\} \subset U_{\min\{f(x_1);f(x_2)\}}$. Así, para cada $\lambda \in (0,1)$, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in U_{\min\{f(x_1);f(x_2)\}}$. Esto es, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{f(x_1); f(x_2)\}$, $\forall \lambda \in (0,1)$. $\square$

Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ convexo, considere una función $f : U \to \mathbb{R}$. Diremos que la función f es *estrictamente cuasicóncava* si, dados $x_1, x_2 \in U$ tal que $x_1 \neq x_2$, tenemos que $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \min\{f(x_1); f(x_2)\}$, $\forall \lambda \in (0,1)$. La función f será *fuertemente cuasicóncava* si, para cada par de vectores $x_1, x_2 \in U$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$, tenemos que $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \min\{f(x_1); f(x_2)\}$, $\forall \lambda \in (0,1)$.

Los teoremas de punto fijo son útiles en teoría económica ya que en muchas situaciones debemos encontrar variables (por ejemplo, canastas y precios) que son el resultado de la solución *simultánea* de varios problemas de optimización.

El más simple de los teoremas de punto fijo con aplicaciones importantes en economía es el siguiente:

Teorema del Punto Fijo de Brouwer
Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, compacto y diferente de vacío.
Si $f : K \to K$ es continua, entonces existe $\overline{x} \in K$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

Demostración. (Caso $n = 1$) En la recta real los conjuntos convexos, compactos y diferentes de vacío son siempre de la forma $[a, b]$, con $a < b$. Así, fije una función continua $f : [a, b] \to [a, b]$ y suponga que $f(a) \neq a$ y $f(b) \neq b$. Entonces, la función $g : [a, b] \to [a, b]$ dada por $g(x) = f(x) - x$ tiene un valor estrictamente positivo en $x = a$ y es estrictamente negativa en $x = b$. Como g es continua, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$, esto es, $f(c) = c$. $\square$

Ninguna de las hipótesis del teorema anterior pueden relajarse sin perder la generalidad del resultado. A continuación se dan algunos ejemplos de funciones que no tienen puntos fijos debido a que dejan de satisfacer un único supuesto del Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

f no es continua. $f : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por $f(0) = 1$ y $f(x) = 0$, si $x \in (0, 1]$.
K no es cerrado. $f : (0, 1] \to (0, 1]$ definida por $f(x) = 0,5x$.
K no es limitado. $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = x + 1$.
K no es convexo. $K = [0, 1] \cup [2, 3]$, con $f(x) = 3$, $\forall x \in [0, 1]$ y $f(x) = 1$, $\forall x \in [2, 3]$.

Aplicación. Existencia de Equilibrio de Nash

Considere un juego estático, con información completa y no-cooperativo, denotado por $\mathcal{G}(I,(u^i,S^i)_{i\in I})$. Cada jugador $i \in I = \{1,\ldots,n\}$ maximiza su función objetivo, $u^i : \prod_{j\in I} S^j \to \mathbb{R}$, escogiendo estrategias en $S^i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, con $n_i > 0$. Esto es, dadas estrategias $s_{-i} = (s^j; j \neq i) \in \prod_{j\neq i} S^j$, el jugador i va a escoger $s^i \in argmax_{s\in S^i}\, u^i(s, s_{-i})$.

Un *equilibrio de Nash* del juego $\mathcal{G}(I,(u^i,S^i)_{i\in I})$ es dado por un vector de estrategias $\overline{s} = (\overline{s}^i; i \in I)$ tal que, para cada $i \in I$, $u^i(\overline{s}) \geq u^i(s, \overline{s}_{-i})$, $\forall s \in S^i$, donde $\overline{s}_{-i} := (\overline{s}^j; j \neq i)$.

Teorema de Existencia de Equilibrio de Nash

Suponga que los conjuntos de estrategias admisibles $\{S^i\}_{i\in I}$ son convexos, compactos y diferentes de vacío. Además, asuma que las funciones objetivo $\{u^i\}_{i\in I}$ son continuas y estrictamente cuasicóncavas en la propia estrategia. Entonces, el juego $\mathcal{G}(I,(u^i,S^i)_{i\in I})$ tiene un equilibrio de Nash.

Demostración. Es suficiente probar que, para cada $i \in I$, la función $h^i : \prod_{j\neq i} S^j \to S^i$ dada por $h(s_{-i}) = argmax_{s\in S^i}\, u^i(s, s_{-i})$ está bien definida y es continua. En ese caso, la función $h : \prod_{j\in I} S^j \to \prod_{j\in I} S^j$ dada por $h((s_j)_{j\in I}) = (h^1(s_{-1}),\ldots,h^n(s_{-n}))$ sería continua y cumpliría las hipótesis del Teorema del Punto Fijo de Brouwer. Luego, existiría $\overline{s} = (\overline{s}^i; i \in I)$ tal que $h(\overline{s}) = \overline{s}$. Esto es, para cada jugador i, $\overline{s}^i = h^i(\overline{s}_{-i})$, lo que concluiría la demostración.

Por esta razón, vamos a demostrar que, dados conjuntos K y S—compactos, convexos y diferentes de vacío—para cada función $f : K \times S \to \mathbb{R}$ continua en (k, s) y estrictamente cuasicóncava en la variable k, la función $g : S \to K$ dada por $g(s) = argmax_{k\in K}\, f(k, s)$ está bien definida y es continua.

Como f es continua y K es compacto y diferente de vacío, el conjunto $A(s) := \{k \in K : f(k, s) \geq f(k', s), \forall k' \in K\}$ es diferente de vacío. Ahora, como f es estrictamente cuasicóncava en la variable k y K es convexo, $A(s)$ tiene un único elemento. Así, g está bien definida.

Dado $s \in S$, fije una secuencia $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset S$ que converge para s. Queremos mostrar que $g(s_m)$ converge para $g(s)$ cuando m crece. Ahora, para cada $m \in \mathbb{N}$, $f(g(s_m), s_m) \geq f(k, s_m)$, $\forall (k, m) \in K \times \mathbb{N}$. La compacidad de K nos asegura que va a existir $\overline{k} \in K$ tal que, salvo subsecuencia, $g(s_m)$ converge para $\overline{k}$ cuando m crece. Así, de la continuidad de f sigue que $f(\overline{k}, s) \geq f(k, s)$, $\forall k \in K$. Esto es, $g(s) = \overline{k}$, y por lo tanto, g es continua en $s \in S$. $\square$

Al igual que en el caso del Teorema del Punto Fijo de Brouwer, en el teorema anterior no se pueden relajar hipótesis sin perder la generalidad del resultado.

Para mostrar esto con algunos ejemplos, dado $K \subset \mathbb{R}$ y una función $f : K \to K$, considere el juego $\mathcal{G}_{f,K}(\{1,2\}, (u^i, S^i)_{i\in\{1,2\}})$ donde $S^1 = S^2 = K$, $u^1(s^1, s^2) = -(s^1 - f(s^2))^2$ y $u^2(s^2, s^1) = -(s^2 - s^1)^2$. Note que, $(\overline{s}^1, \overline{s}^2) \in S^1 \times S^2$ es un equilibrio de Nash de $\mathcal{G}_{f,K}$ si y sólo si $\overline{s}^2 = \overline{s}^1 = f(\overline{s}^2)$.[3]

En la siguientes situaciones no hay equilibrios de Nash para el juego $\mathcal{G}_{f,K}$:

Funciones objetivo discontinuas. $K = [0, 1]$, $f(0) = 1$ y $f(x) = 0$, si $x \in (0, 1]$.

Los conjuntos de estrategias no son cerrados. $K = (0, 1]$ y $f(x) = 0,5x$.

Los conjuntos de estrategias no son acotados. $K = [0, +\infty)$ y $f(x) = x + 1$.

Los conjuntos de estrategias no son convexos.
$K = [0, 1] \cup [2, 3]$, $f(x) = 3$, $\forall x \in [0, 1]$ y $f(x) = 1$, $\forall x \in [2, 3]$.

Falla la cuasiconcavidad de las funciones objetivo.
$K = [0, 1]$, $f(x) = x$ y $u^1(s^1, s^2) = (s^1 - f(s^2))^2$.

Ejercicios

(1) Pruebe que el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.

(2) Por definición, una secuencia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U \subset \mathbb{R}^n$ es convergente en U si existe $\overline{x} \in U$ tal que, para todo $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que, $\|x_n - \overline{x}\| < \epsilon$, $\forall n \geq N_\epsilon$. Demuestre que un conjunto $B \subset U \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado en U si, y solamente si, toda secuencia de B convergente en U tiene su límite en B.

(3) Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, si una función $g : U \to \mathbb{R}$ es continua en U entonces el conjunto $\{x \in U : g(x) \geq 0\}$ es cerrado en U. Muestre que la recíproca no es verdadera.

(4) Una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es *uniformemente continua* en U si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x - y\| < \delta$ implica que $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$. Si U es compacto, toda $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua es uniformemente continua.

(5) Toda función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forma $f(x) = a \cdot x + b$, donde $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$, es cuasicóncava.

[3] Dicho de otra forma, $\mathcal{G}_{f,K}$ tiene un equilibrio de Nash si y sólo si $f : K \to K$ tiene un punto fijo.

(6) Una función monótona (creciente o decreciente) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es siempre cuasicóncava. Toda función cóncava es cuasicóncava.

(7) Dada una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde U es convexo, f es cuasicóncava en U si y sólo si, para cada $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in U : f(x) > a\}$ es convexo.

(8) Dados $(\alpha, \beta) \gg 0$, la función $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ es estrictamente cuasicóncava.

(9) Dado $a \in \mathbb{R}^n$, la función $f(x) = -\|x - a\|$ es estrictamente cuasicóncava.

(10) Suponga que toda subsecuencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ tiene una subsecuencia convergente a $x \in \mathbb{R}^n$. Muestre que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

(11) Sea $B = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es irracional}\}$. Es B un conjunto cerrado?

(12) Formalice la siguiente afirmación: *El conjunto de las matrices invertibles es abierto.*

(13) Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Si A es abierto, podemos afirmar que

$$AB := \{ab \in \mathbb{R} : a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

también es abierto?

(14) Muestre que $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si, y solamente si, A es la unión de bolas abiertas.

(15) Muestre que $B \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si, y solamente si, B es la intersección contable de conjuntos abiertos.

(16) Muestre que $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si, y solamente si, toda secuencia en K posee una subsecuencia convergente.

(17) Sea K un subconjunto compacto y no-vacío de $\mathbb{R}^n$. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de subconjuntos cerrados y no-vacíos de K tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subseteq A_n$. Muestre que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es no-vacío.

(18) Dados dos conjuntos compactos, convexos y diferentes de vacío $C \subseteq K \subset \mathbb{R}^n$, considere la función $f : K \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \min_{y\in C} \|x - y\|.$$

Muestre que f es continua. Además, pruebe que la función $G : K \to C$ dada por $G(x) = \{y \in C : f(x) = \|x - y\|\}$ está bien definida y es continua.

(19) Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, compacto y diferente de vacío. Sean $f_i : C \to C$, con $i \in \{1, \dots, m\}$, funciones continuas. Muestre que existe $x \in C$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \geq x.$$

(20) Caracterización de precios de no-arbitraje

Considere un mercado con J activos negociados por individuos que maximizan su riqueza. Cada individuo que tiene acceso al mercado puede formar un portafolio $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_J) \in \mathbb{R}^J$, donde $\theta_j > 0$ significa que el individuo compró θ_j unidades del activo j, mientras que $\theta_j < 0$ implica que el individuo hizo una promesa de pago futuro equivalente al valor de mercado de θ_j unidades del activo j (lo que llamamos de venta al descubierto). El valor de cada unidad del activo j es dado por $q_j \geq 0$. Supondremos que existe incertidumbre sobre el valor futuro de los activos. Así, hay S posibles estados de la naturaleza. En el estado $s \in \{1, \dots, S\}$ el activo $j \in \{1, \dots, J\}$ va a pagar (prometer) una cantidad $R_{s,j}$ por unidad comprada (vendida) en el primer periodo. En resumen, un individuo que constituye un portafolio $\theta \in \mathbb{R}^J$ espera recibir en cada estado s la cantidad $\sum_{j=1}^{J} R_{s,j}\theta_j$.

Como los individuos buscan maximizar su riqueza, es de esperar que no existan posiciones financieras que entreguen ganancias ilimitadas sin incurrir en riesgos. Formalmente, diremos que *no existen oportunidades de arbitraje* si no hay ningún portafolio $\theta \in \mathbb{R}^J$ tal que $\sum_{j=1}^{J} q_j\theta_j \leq 0$ y, para cada estado $s \in \{1, \dots, S\}$, $\sum_{j=1}^{J} R_{s,j}\theta_j \geq 0$, con por lo menos una de las desigualdades estricta. Dicho en otros términos, no es posible: (i) recibir recursos hoy sin comprometer riqueza futura; o (ii) sin pagar nada hoy aumentar la riqueza futura.

En la ausencia de oportunidades de arbitraje va a existir una relación intrínseca entre el precio de un activo y sus pagos futuros: no existen oportunidades de arbitraje en el mercado si, y solamente si, el precio de cada activo es igual al valor descontado de sus pagos futuros. Esto es, existe $(\gamma_1, \dots, \gamma_S) \in \mathbb{R}^S_{++}$ tal que,

$$q_j = \sum_{s=1}^{S} \gamma_s R_{s,j}, \quad \forall j \in J.$$

Para probar está caracterización, se sugiere seguir los siguientes pasos:

(a) Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -q_1 & \dots & -q_J \\ R_{1,1} & \dots & R_{1,J} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{S,1} & \dots & R_{S,J} \end{pmatrix}.$$

Pruebe que, en la ausencia de oportunidades de arbitraje, el conjunto $C := \{z \in \mathbb{R}^{S+1} : \exists \theta \in \mathbb{R}^J, z = A\theta\}$ es disjunto con $C_\epsilon := \{z \in \mathbb{R}^{S+1}_{+} : \|z\| \in [\epsilon, 2]\}$, para cada $\epsilon > 0$.

(b) Muestre que C y C_ϵ son convexos, diferentes de vacío y cerrados.
(c) Muestre que C_ϵ es compacto.
(d) Mueste que existe $p \gg 0$ tal que $p \cdot z \leq 0$, para cada $z \in C$.
(e) Muestre que $p \cdot z = 0$, para cada $z \in C$ (recuerde que C es un subespacio vectorial).
(f) Concluya la demostración.

(21) Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es conexo si no existen conjuntos abiertos A_1, A_2 disjuntos y diferentes de vacío tales que $A = A_1 \cup A_2$. Pruebe que toda función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lleva conjuntos conexos de $\mathbb{R}^n$ en conexos de $\mathbb{R}^m$.

(22) Muestre que todo conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es conexo.

(23) Muestre el Teorema del Valor Intermedio: Dada una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(a)f(b) < 0$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

(24) Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_{++}$ un función continua. Muestre que existe $a > 0$ tal que, para cada $x \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{a} < f(x) < a.$$

Podemos afirmar que f tiene puntos fijos? Justifique detalladamente su respuesta.

CAPITULO II
Correspondencias

En este capítulo estudiaremos aplicaciones que llevan vectores en conjuntos, llamadas correspondencias. Analizaremos conceptos de continuidad para correspondencias y sus propiedades.

Definición 6. Una correspondencia entre $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ es una aplicación, denotada por Γ, que asocia a cada $x \in X$ un subconjunto $\Gamma(x)$ de Y.

Notación: $\Gamma : X \twoheadrightarrow Y$. Note que, toda correspondencia $\Gamma : X \twoheadrightarrow Y$, también llamada *función de conjuntos*, es una *función* de X en $2^Y := \{A \in \mathbb{R}^m : A \subset Y\}$.

Para definir el concepto de continuidad de una correspondencia $\Gamma : X \twoheadrightarrow Y$ podríamos pensar en una analogía con la continuidad de una función: la preimagen de todo abierto en Y debería ser un abierto de X. Sin embargo, como $\Gamma(x)$ es un conjunto, no es claro que significa que un vector $x \in X$ esté en la "preimagen" de un conjunto $A \subset Y$. De hecho, al menos dos posibilidades hacen sentido, $x \in X$ esta en la preimagen de A si $\Gamma(x) \subset A$, o bien si $\Gamma(x) \cap A \neq \emptyset$.

Esto da lugar a dos conceptos de pre-imágen y dos definiciones de "continuidad":

Definición 7. Una correspondencia $\Gamma : X \subset \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow Y$ es *hemicontinua superior* en $x_0 \in X$ si, para cada conjunto abierto A de $Y \subset \mathbb{R}^m$ tal que $\Gamma(x_0) \subset A$, la *preimagen superior de* A, $\Gamma^+[A] := \{x \in X : \Gamma(x) \subset A\}$, contiene una vecindad de x_0. Una correspondencia $\Gamma : X \subset \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow Y$ es *hemicontinua superior en* X si es hemicontinua superior en cada $x_0 \in X$.

Definición 8. Una correspondencia $\Gamma : X \subset \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow Y$ es *hemicontinua inferior* en $x_0 \in X$ si, para cada conjunto abierto A de $Y \subset \mathbb{R}^m$ tal que $\Gamma(x_0) \cap A \neq \emptyset$, la *preimagen inferior de* A, $\Gamma^-[A] := \{x \in X : \Gamma(x) \cap A \neq \emptyset\}$, contiene una vecindad de x_0. Una correspondencia $\Gamma : X \subset \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow Y$ es *hemicontínua inferior en* X si es hemi-continua inferior en cada $x_0 \in X$.[4]

---

[4]Una confusión natural es pensar que toda correspondencia $\Gamma : X \subset \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow Y$ que tiene valores diferentes de vacío, $[\Gamma(x) \neq \emptyset, \forall x \in X]$, es hemicontinua inferior desde que sea hemicontinua superior. La confusión está basada en el

Definición 9. Una correspondencia $\Gamma : X \subset \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow Y$ es *continua* en $x_0 \in X$ si es hemicontinua superior e inferior en x_0. Una correspondencia $\Gamma : X \subset \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow Y$ es *contínua en X* si es continua en cada $x_0 \in X$.

Ejemplos

$\diamond$ Considere la correspondencia $\Gamma : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ definida por $\Gamma(x) = [0,1]$, $\forall x \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$ y $\Gamma(x) = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\forall x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]$. Entonces, $A = (0.8, 0.9)$ es abierto en $[0,1]$, pero $\Gamma^-[A] = \left[0, \frac{2}{3}\right]$ no lo es. Así, Γ no es hemicontinua inferior en $x_0 = \frac{2}{3}$. En cualquier otro punto del dominio la correspondencia Γ va a ser hemicontinua inferior. Además, Γ es hemicontinua superior en $[0,1]$.

$\diamond$ Sea $\Omega : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ definida por $\Omega(x) = [0,1]$, $\forall x \in \left[0, \frac{2}{3}\right)$ y $\Omega(x) = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\forall x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Entonces, $A = (0.1, 0.9)$ es abierto en $[0,1]$, pero $\Omega^+[A] = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ no lo es. Así, Ω no es hemicontinua superior en $x_0 = \frac{2}{3}$. En cualquier otro punto del dominio la correspondencia Ω va a ser hemicontinua superior. Además, Ω es hemicontinua inferior en $[0,1]$.[5]

Caracterización secuencial de la hemicontinuidad superior

Sea $X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y $\Gamma : X \twoheadrightarrow Y$. Dado $x \in X$, $\Gamma(x)$ es compacto y Γ es hemicontinua superior en $x \in X$ si, y solamente si, dada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente para x, para toda $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, con $y_n \in \Gamma(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una subsecuencia $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un vector $y \in \Gamma(x)$.

Demostración. Suponga que Γ es hemicontinua superior en $x \in X$ y que $\Gamma(x)$ es compacto. Fije $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente para x, e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, con $y_n \in \Gamma(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $k \in \mathbb{N}$, como $\Gamma(x)$ es compacto, siempre existe un conjunto abierto $A_k \subset Y$ tal que: $\Gamma(x) \subset A_k$ y para cada $a \in A_k$, $\min_{y\in\Gamma(x)} \|a - y\| < \frac{1}{k}$. En particular, A_k es limitado. Por otro lado, como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge para x y $\Gamma^+[A_k]$ es abierto en X, existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que $\Gamma(x_n) \subset A_k$, para cada $n \geq N_k$. Así, $\{y_n\}_{n\geq N_k} \subset A_k$.

Note que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la secuencia $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente. Por lo tanto, $\{y_{N_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A_1$ es una subsecuencia acotada de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Esto es, tiene una subsecuencia convergente. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$, $y_{N_k} \in A_k$.

hecho que $\Gamma(x) \subset A \subset Y$ implica que $\Gamma(x) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\Gamma^+[A] \subset \Gamma^-[A]$. Sin embargo, esto nada nos dice sobre las propiedades topológicas de ambos conjuntos.

[5] La verificación de estas propiedades, así como de aquellas enunciadas en el ejemplo previo, quedan como un ejercicio para el lector. Se recomienda utilizar las *caracterizaciones secuenciales* de hemicontinuidad superior e inferior.

Esto es, existe $\tilde{y}_k \in \Gamma(x)$ tal que, $\|y_{N_k} - \tilde{y}_k\| < \frac{1}{k}$. Así, $\{\tilde{y}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ también tiene una subsecuencia que converge y al mismo límite de la subsecuencia de $\{y_{N_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Esto es, como $\Gamma(x)$ es cerrado, existe una subsecuencia de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para un elemento de $\Gamma(x)$.

Recíprocamente, dada la propiedad secuencial en $x \in X$ queremos probar que $\Gamma(x)$ es compacto y Γ es hemicontinua superior en x. Escogiendo la secuencia constante $\{x\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, la propiedad secuencial nos asegura que toda secuencia en $\Gamma(x)$ tiene una subsecuencia convergente. Así, $\Gamma(x)$ es compacto. Para probar la hemicontinuidad superior en x suponga, por contradicción, que existe un abierto $A \subset Y$, con $\Gamma(x) \subset A$, tal que $\Gamma^+[A]$ no contiene una vecindad de x. Esto es, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x;X)$ e $y_n \in \Gamma(x_n) \cap A^c$. Por lo tanto, sigue de la propiedad secuencial que tiene que existir una subsecuencia de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para un elemento de $\Gamma(x)$. Sin embargo, como A^c es cerrado en Y, el límite de toda subsecuencia de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está en A^c, el cual tiene intersección vacía con $\Gamma(x)$. Una contradicción. $\square$

Caracterización secuencial de hemicontinuidad inferior

Sea $X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Una correspondencia $\Gamma : X \twoheadrightarrow Y$ es hemicontinua inferior en $x \in X$ si y sólo si, dada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente para x, para todo $y \in \Gamma(x)$ existe una secuencia $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, con $y_n \in \Gamma(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que converge para y.

Demostración. Suponga que Γ es hemicontinua inferior en $x \in X$. Fije $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente para x, e tome un elemento $y \in \Gamma(x)$. Dado $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $A_k = B_{\frac{1}{k}}(y;Y) \subset Y$ es abierto y satisface $\Gamma(x) \cap A_k \neq \emptyset$. Luego, por la hemicontinuidad inferior en x, va a existir $N_k \in \mathbb{N}$ tal que $\Gamma(x_n) \cap A_k \neq \emptyset$, para cada $n \geq N_k$. Dado que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la secuencia $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, $\Gamma(x_n) \cap A_j \neq \emptyset$, para cada $n \in \{N_j, \ldots, N_{j+1} - 1\}$. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $j_n \in \mathbb{N}$ (estrictamente creciente en n) tal que $n \in \{N_{j_n}, \ldots, N_{j_n+1} - 1\}$ y, para algún $y_n \in \Gamma(x_n)$, $\|y - y_n\| < \frac{1}{j_n}$. Dicho de otra forma, existe una secuencia $\{y_n\}_{\mathbb{N}}$ tal que: $y_n \in \Gamma(x_n)$ y $\lim_n y_n = y$. Lo que queríamos probar.

Recíprocamente, suponga que la propiedad secuencial se cumple para x. Si Γ no es hemicontinua inferior en x entonces existe un conjunto abierto A en Y tal que: $\Gamma(x) \cap A \neq \emptyset$ y $\Gamma^-[A]$ no contiene una vecindad de x. Esto es, existe por lo menos un vector $y \in \Gamma(x) \cap A$ y una secuencia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente para x tal que $\Gamma(x_n) \subset A^c$. Esto contradice la propiedad secuencial: cualquier $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \in \Gamma(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ esta contenida en el conjunto cerrado A^c, el cual no contiene al vector $y \in A$. $\square$

Las siguientes propiedades serán muy útiles al estudiar la teoría básica de equilibrio general. Las demostraciones de cada una de ellas utilizan las caracterizaciones secuenciales que acabamos de probar.

Proposición 8. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ y $\Gamma : X \twoheadrightarrow Y$ una correspondencia.

(P1) Si Y es compacto, entonces Γ es hemicontinua superior y tiene valores cerrados en X si y sólo si $\mathrm{Graph}[\Gamma] := \{(x,y) \in X \times Y : y \in \Gamma(x)\}$, llamado *gráfico de* Γ, es cerrado en $X \times Y$.

(P2) Si Γ tiene valores diferentes de vacío y gráfico abierto en $X \times Y$, entonces Γ es hemicontinua inferior en X.

(P3) Si Γ es hemicontinua inferior en X, la correspondencia $\overline{\Gamma} : X \twoheadrightarrow Y$ definida por $\overline{\Gamma}(x) = \overline{\Gamma(x)}$ también es hemicontinua inferior en X.

Demostración. (P1) Suponga que Γ es hemicontinua superior y tiene valores cerrados en X. Sea $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Graph}[\Gamma]$ una secuencia convergente para $(x,y) \in X \times Y$. Como Γ tiene valores compactos (Y es compacto), sigue de la caracterización secuencial de hemicontinuidad superior que $y \in \Gamma(x)$. Recíprocamente, suponga que el gráfico de Γ es cerrado en $X \times Y$. Entonces, Γ tiene valores compactos (cerrados en Y). Dada una secuencia $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Graph}[\Gamma]$ tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algún $x \in X$, como $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, tiene una subsecuencia convergente. Como el gráfico de Γ es cerrado, el límite de esa subsecuencia esta en $\Gamma(x)$. Esto concluye la demostración.

(P2) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para $x \in X$ y fije un vector $y \in \Gamma(x) \neq \emptyset$. Como $(x,y) \in \mathrm{Graph}[\Gamma]$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon((x,y); X \times Y) \subset \mathrm{Graph}[\Gamma]$. Luego, existe $N > 0$ tal que, para cada $n > N$, hay un vector $y_n \in \Gamma(x_n)$ tal que la secuencia $\{y_n\}_{n>N}$ converge para y cuando n crece.

(P3) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una secuencia convergente para $x \in X$. Fije $y \in \overline{\Gamma}(x)$. Si $y \in \Gamma(x)$, la hemicontinuidad inferior de Γ nos garantiza que existe una secuencia $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para y tal que $y_n \in \Gamma(x_n) \subset \overline{\Gamma}(x_n)$. Ahora, si $y \in \overline{\Gamma}(x) \setminus \Gamma(x)$, para cada $k \in \mathbb{N}$ va a existir una secuencia $\{y_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para un vector $y^k \in \Gamma(x)$ tal que $y_n^k \in \Gamma(x_n) \subset \overline{\Gamma}(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\|y - y^k\| < \frac{1}{k}$. Sea $n(0) = 1$ y para cada $k \geq 1$, defina $n(k)$

como el menor entero mayor que $n(k-1)$ tal que $\|y^k - y^k_m\| < \frac{1}{k}$ para todo $m \geq n(k)$. Entonces, la secuencia $\{\tilde{y}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ definida por $\tilde{y}_j = y^k_j$ si $j \in \{n(k), \ldots, n(k+1)\}$ satisface, para cada $j \in \mathbb{N}$, las siguientes propiedades: $\tilde{y}_j \in \overline{\Gamma}(x_j)$ y $\|y - y_j\| < \frac{2}{k}$, $\forall j \in \{n(k), \ldots, n(k+1)\}$. Esto concluye la demostración. $\square$

Vamos a aplicar las propiedades anteriores para probar la hemicontinuidad superior e inferior de la correspondencia de *asignaciones presupuestariamente factibles*, la cual asocia a cada vector $p \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ el conjunto $C(p) := \{x \in K : p \cdot x \leq p \cdot w\} \subset K$, donde $w \in \mathbb{R}^n_{++}$ y $K := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \|x\| \leq W\}$, para algún $W \in \mathbb{R}^n_{++}$.

Por un lado, al ser K compacto, C va a ser hemicontinua superior en $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ si y solo si su gráfico es cerrado. Ahora, dada una secuencia convergente, $\{(p_n, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \text{Graph}[C]$, por definición $p_n \cdot x_n \leq p_n \cdot w$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, al tomar el límite cuando n va para infinito, llegamos a que $(\lim_n p_n) \cdot (\lim_n x_n) \leq (\lim_n p_n) \cdot w$. Además, como K es cerrado, $\lim_n p_n \in K$. Esto es, $(\lim_n p_n, \lim_n x_n) \in \text{Graph}(C)$. Por lo tanto, C es hemicontinua superior en su dominio.

Por otro lado, la hemicontinuidad inferior la vamos a deducir de las propiedades (P2) y (P3). En efecto, si definimos la correspondencia $\dot{C} : \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\} \twoheadrightarrow K$ como $\dot{C}(p) = \{x \in K : p \cdot x < p \cdot w\}$, para todo $p \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, $\dot{C}(p) \neq \emptyset$, ya que $w \in \mathbb{R}^n_{++}$. Luego, sigue de la propiedad (P2) que $\dot{C}$ es hemicontinua inferior si tiene gráfico abierto. Ahora, dado $(p, x) \in \text{Graph}[\dot{C}]$ si y sólo si $x \in K$ y $p \cdot x < p \cdot w$, por lo que pequeñas perturbaciones de p y x (en K) todavía van a satisfacer la desigualdad. Así, $\dot{C}$ es hemicontinua inferior. Sigue de la propiedad (P3) que la correspondencia $\overline{\dot{C}} : \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\} \twoheadrightarrow K$ definida por $\overline{\dot{C}}(p) = \overline{\dot{C}(p)}$ también es hemicontinua inferior. Como la correspondencia C tiene valores cerrados, $\overline{\dot{C}(p)} = C(p)$, $\forall p \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$. Esto es, la correspondencia C es hemicontinua inferior.

A continuación, presentamos una generalización del Teorema del Punto Fijo de Brouwer para correspondencias. Este resultado será esencial para probar la existencia de equilibrio en juegos donde las estrategias admisibles de un jugador pueden depender de las acciones de los otros jugadores, llamados juegos sociales o juegos generalizados (ver Capítulo IV).

Teorema del Punto Fijo de Kakutani

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, compacto y diferente de vacío.
Si $\Gamma : K \twoheadrightarrow K$ es hemicontinua superior y tienen valores compactos, convexos y diferentes de vacío, entonces existe $\overline{x} \in K$ tal que $\overline{x} \in \Gamma(\overline{x})$.

Ejercicios

(1) Muestre que la hemicontinuidad superior de la correspondencia de asignaciones presupuestariamente factibles se pierde cuando cambiamos K por $\mathbb{R}^n_+$.

(2) La hemicontinuidad inferior de la correspondencia C no necesariamente se cumple cuando $w \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$.

(3) Encuentre un ejemplo de una correspondencia con gráfico cerrado y valores compactos, que no sea hemicontinua superior.

(4) Dados $X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, sea $\Gamma : X \twoheadrightarrow Y$ la correspondencia definida por $\Gamma(x) = \{f(x)\}$, donde $f : X \to Y$ es una función dada. Muestre que Γ es hemicontinua superior (resp. inferior) en $x_0 \in X$ si y solamente si f es continua en x_0.

(5) Dadas funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$; la correspondencia $\Gamma(x) = [f(x), g(x)]$ es continua si y sólo si f y g son continuas.

(6) Si una correspondencia $\Gamma : X \twoheadrightarrow Y$ es hemicontinua superior (resp. inferior), analice la hemicontinuidad superior e/o inferior de la correspondencia $co(\Gamma)(x) := convexhull\{\Gamma(x)\}$.

(7) Sean $\Gamma, \Omega : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ correspondencias hemicontinuas superiores con valores cerrados y diferentes de vacío. Muestre que la correspondencia $\Phi : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ definida por $\Phi(x) = \Gamma(x) \cap \Omega(x)$ es hemicontinua superior.

(8) Considere una correspondencia $\Gamma : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ con valores compactos y diferentes de vacío, cuyo gráfico viene dado por

Analice la continuidad de Γ.

(9) Fije $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$. Considere la correspondencia $\Gamma : X \twoheadrightarrow Y$ dada por $\Gamma(x) = A$, donde $A \subset Y$. Muestre que Γ es continua.

CAPITULO III

Teorema del Máximo de Berge

El siguiente resultado caracteriza la función valor y la correspondencia de asignaciones óptimas de un problema de optimización finito dimensional.

Teorema del Máximo de Berge

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$. Dada una función $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ y una correspondencia $\Gamma : Y \twoheadrightarrow X$, defina $v(y) = \max_{x \in \Gamma(y)} f(x,y)$ y $\Omega(y) = \mathrm{argmax}_{x \in \Gamma(y)} f(x,y)$.

Suponga que f y Γ son continuas. Además, asuma que Γ tiene valores compactos y diferentes de vacío. Entonces, v es continua y Ω es hemicontinua superior con valores compactos y diferentes de vacío.

Demostración. Como Γ tiene valores diferentes de vacío y compactos, la continuidad de f implica que, para cada $y \in Y$, $\Omega(y) \neq \emptyset$. Ahora, dado $y \in Y$, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega(y)$ una secuencia convergente para algún punto $x \in X$. Como $x_n \in \Omega(y)$, $f(x_n, y) \geq f(x', y)$, $\forall x' \in \Gamma(y)$. Tomando el límite cuando n va para infinito, obtenemos que $f(x,y) \geq f(x',y)$, $\forall x' \in \Gamma(y)$. Esto es, $x \in \Omega(y)$. Por lo tanto, $\Omega(y)$ es un conjunto compacto y diferente de vacío, para todo $y \in Y$.

Para probar que Ω es hemicontinua superior podemos utilizar la caracterización secuencial. Fije $y \in Y$ y tome una secuencia $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ convergente para $y \in X$. Dada una secuencia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \in \Omega(y_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sabemos que $x_n \in \Gamma(y_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, sigue de la hemicontinuidad superior de Γ que existe una subsecuencia $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para algún $x \in \Gamma(y)$. Queda por probar que $x \in \Omega(y)$. Como Γ es hemicontinua inferior, para cada $x' \in \Gamma(y)$ existe una secuencia $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente para x' tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x'_n \in \Gamma(y_n)$. Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$, $f(x_{n_k}, y_{n_k}) \geq f(x'_{n_k}, y_{n_k})$, y tomando el límite cuando k tiende para infinito obtenemos que $f(x,y) \geq f(x',y)$. Esto es, $x \in \Omega(y)$, lo que prueba la hemicontinuidad superior.

Para probar la continuidad de la función v, considere una secuencia $\{y_n\} \subset Y$ que converge para $y \in Y$. Sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in \Gamma(y_n)$ tal que $v(y_n) = f(x_n, y_n)$. Esto es, existe $x_n \in \Omega(y_n)$. Como Ω es hemicontinua superior, existe una subsecuencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para un punto $x \in \Omega(y)$. Como Ω es hemicontinua inferior, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\tilde{x}_n \in \Omega(y_n)$ tal que la secuencia $\{\tilde{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x. Así, $v(y_n) = f(\tilde{x}_n, y_n)$ converge para $v(y) = f(x,y)$ cuando n va para infinito. Luego, v es continua. □

Corolario. Bajo las condiciónes del Teorema del Máximo de Berge, asuma que Γ tiene valores convexos. Si f es cuasicóncava en la variable x, Ω tiene valores convexos. Si f es estrictamente cuasicóncava en la variable x, Ω es una funcíon continua.

Demostración. Dado $y \in Y$, fije dos puntos x_1 y x_2 en $\Omega(y)$. Como Γ tiene valores convexos, para cada $\lambda \in (0,1)$, $z_\lambda := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Gamma(y)$. Además, si f es cuasicóncava en la variable x, $f(z_\lambda, y) \geq \min\{f(x_1,y), f(x_2,y)\} = v(y)$. Luego, $z_\lambda \in \Omega(y)$, $\forall \lambda \in (0,1)$. Cuando f es estrictamente cuasicóncava en la variable x, $x_1 = x_2$ (caso contrario tendríamos una contradicción con la optimalidad de x_1 y x_2). Así, $\Omega(y)$ tiene un único elemento y, por lo tanto, puede ser identificada con una función continua (vea el ejercicio (4) en la página 27). □

CAPITULO IV
Equilibrio en Juegos Sociales

Un juego social es un juego estático, con información completa y no-cooperativo con un conjunto finito de jugadores, cada uno de los cuales considera el efecto que las estrategias escogidas por los otros individuos tienen tanto sobre su función objetivo cuanto sobre su conjunto de estrategias admisibles.

Formalmente, denotaremos el juego social por $\mathcal{S}(I,(u^i,S^i,\Gamma^i)_{i\in I})$, donde I es el conjunto (finito) de jugadores y $u^i:\prod_{j\in I}S^j\to\mathbb{R}$ la función objetivo del jugador $i\in I$, la cual está definida para cada perfil de estrategias $s=(s^j;j\in I)\in\prod_{j\in I}S^j$, donde $S^j\subset\mathbb{R}^{n_i}$, $n_j>0$, es el espacio de estrategias del jugador j. Cada jugador $i\in I$ adelanta perfectamente las jugadas de los otros participantes, $s_{-i}:=(s_j;j\in I\setminus\{i\})$, con el objetivo de maximizar la función u^i escogiendo una estrategia en el conjunto $\Gamma^i(s_{-i})\subset S^i$. Esto es, el jugador i va a escoger $s^i\in argmax_{s\in\Gamma^i(s_{-i})}\,u^i(s,s_{-i})$.

Definición 10. Un *equilibrio* para el juego social $\mathcal{S}(I,(u^i,S^i,\Gamma^i)_{i\in I})$ es dado por un vector de estrategias $\overline{s}=(\overline{s}^i;i\in I)$ tal que, para cada $i\in I$, $u^i(\overline{s})\geq u^i(s,\overline{s}_{-i})$, $\forall s\in\Gamma^i(\overline{s}_{-i})$, donde $\overline{s}_{-i}:=(\overline{s}^j;j\neq i)$.

A continuación probaremos un resultado de existencia de equilibrio para juegos sociales, el cual es muy útil para probar la existencia de equilibrio en modelos de equilibrio general.

Teorema de Existencia de Equilibrio en Juegos Sociales
Dado $\mathcal{S}(I,(u^i,S^i,\Gamma^i)_{i\in I})$, suponga que los espacios de estrategias $\{s^i\}_{i\in I}$ son convexos, compactos y diferentes de vacío. Además, asuma que las funciones objetivo $\{u^i\}_{i\in I}$ son continuas y cuasicóncavas en la propia estrategia. Si las correspondencias de estrategias admisibles $\{\Gamma^i\}_{i\in I}$ son continuas y tienen valores compactos, convexos y diferentes de vacío, entonces existe un equilibrio para $\mathcal{S}(I,(u^i,S^i,\Gamma^i)_{i\in I})$.

Demostración. Como el conjunto I es finito, sin pérdida de generalidad lo podemos identificar con el conjunto $\{1,\dots,\kappa\}$, para algún $\kappa\in\mathbb{N}$. Ahora, para cada $i\in I$, defina la correspondencia $\Phi^i:\prod_{j\neq i}S^j\twoheadrightarrow S^i$ via $\Phi^i(s_{-i}):=argmax_{s\in\Gamma^i(s_{-i})}\,u^i(s,s_{-i})$. Como consecuencia del Teorema del Máximo de Berge sabemos que, para cada $i\in I$, Φ^i es hemicontinua superior y tiene valores compactos, convexos y diferentes de vacío. Por lo tanto, la correspondencia $\Phi : \prod_{i=1}^{\kappa} S^i \twoheadrightarrow \prod_{i=1}^{\kappa} S^i$ definida por $\Phi(s) = \Phi^1(s_{-1}) \times \cdots \times \Phi^{\kappa}(s_{-\kappa})$ satisface las hipótesis del Teorema del Punto Fijo de Kakutani. Luego, existe $\overline{s} = (\overline{s}^i; i \in I)$ tal que $\overline{s} \in \Phi(\overline{s})$, lo que concluye la demostración. $\square$

Una consecuencia directa del teorema anterior es la existencia, para todo juego finito, de un equilibrio de Nash en *estrategias mixtas*. De hecho, al pasar de estrategias puras a mixtas lo que hacemos es cambiar el conjunto de jugadas admisibles, originalmente finito, por un conjunto de medidas de probabilidad, el cual es compacto, convexo y diferente de vacío. Además, al trabajar con estrategias mixtas, la función objetivo de cada jugador es una media ponderada de los *payoffs* que se recibían con las estrategias puras. Así, estas funciones objetivo son continuas y cuasicóncavas en la propia estrategia (mixta).

Ejercicio (Oligopolio con restricciones de capacidad)

Considere un mercado con n firmas, donde la cantidad ofertada por la industria es limitada a un máximo de $K > 0$ unidades. Cada firma i busca maximizar sus beneficios $F_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, los cuales dependen de la cantidad producida x_i y de la cantidad total ofertada por el resto de la industria $\sum_{j \neq i} x_j$.

Como la cantidad máxima ofertada no puede superar K unidades, la firma i se restringe a escoger un nivel de producción $x_i \in \left[0, \max\left\{K - \sum_{j \neq i} x_j, 0\right\}\right]$.

Si las funciones $\{F_i\}_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ son cuasicóncavas en la estrategia x_i y continuas, demuestre que existe un equilibrio de Nash en este mercado.

CAPITULO V

Equilibrio Walrasiano en Economías de Intercambio

Considere una economía con m individuos y n mercancías. Los individuos tienen preferencias racionales, continuas y convexas (es decir, representables por funciones de utilidad continuas y cuasicóncavas). Las mercancías son perfectamente divisibles. Asuma que las decisiones de cada individuo por separado no afectan los precios, los cuales se toman como dados al momento de escoger las canastas de consumo. Así, cada consumidor va a escoger la mejor canasta de mercancías entre aquellas compatibles con su renta monetaria—la cual viene dada por el valor de mercado de sus asignaciones iniciales. Por lo tanto, a precios unitarios $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+$, el individuo $i \in \{1, \ldots, m\}$ va a demandar una canasta $x^i(p, p \cdot w^i) \in \mathbb{R}^n_+$, llamada demanda Marshalliana, tal que

$$\begin{aligned} &u^i(x^i(p, p \cdot w^i)) \geq u^i(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}^n_+ : p \cdot x \leq p \cdot w^i, \\ &p \cdot x^i(p, p \cdot w^i) \leq p \cdot w^i, \end{aligned}$$

donde $u^i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ es su función de utilidad y $w^i \in \mathbb{R}^n_+$ su asignación inicial de mercancías.

Definición 11. Diremos que $\overline{p} \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ es un *precio de equilibrio* si no existe exceso de demanda en el mercado y los recursos no son destruidos. Esto es,

$$\sum_{i=1}^{m} \left(x^i(\overline{p}, \overline{p} \cdot w^i) - w^i \right) \leq 0$$

$$\overline{p} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(x^i(\overline{p}, \overline{p} \cdot w^i) - w^i \right) = 0.$$

Un *equilibrio Walrasiano*, o equilibrio competitivo, es dado por un vector de precios de equilibrio $\overline{p} \in \mathbb{R}^n_+$ junto con asignaciones de consumo óptimas $x^i(\overline{p}, \overline{p} \cdot w^i)$ para cada individuo $i \in \{i, \ldots, m\}$.

Para encontrar los equilibrios Walrasianos de una economía de intercambio es necesario: (1) calcular las demandas Marshallianas de cada consumidor; y (2) encontrar precios que hagan que la demanda agregada de la economía sea menor o igual a las asignaciones iniciales agregadas (oferta de mercado).

Como los ingresos de cada consumidor son dados en términos reales, las demandas por consumo son homogéneas de grado cero en precios. Así, no hay pérdida de generalidad en normalizar los precios de las mercancías de tal forma que, para alguna canasta $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, $\sum_{i=1}^n p_i v_i = 1$.

Esto es, en equilibrio, sólo se determinan *precios relativos*. Las normalizaciones nos ayudarán a simplificar los cálculos cuando busquemos una asignación de equilibrio. Por ejemplo, podríamos suponer que $p_1 = 1$ (esto es, fijar $v = (1, 0, \ldots, 0)$), o bien que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, fijando el vector $v = (1, \ldots, 1)$.

Ejemplo 1. Suponga que $(m, n) = (2, 2)$ y que los dos individuos tienen preferencias idénticas y representables por una función de utilidad Coob-Douglas, $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Si las asignaciones individuales son $w^1 = (1, 0)$ y $w^2 = (0, 1)$, entonces las demandas Marshallianas a precios $p = (p_1, p_2) \gg 0$, donde $p_1 + p_2 = 1$, son:

$$x^1(p, p \cdot w^1) = \left(0,5; 0,5\frac{p_1}{p_2}\right); \qquad x^2(p, p \cdot w^2) = \left(0,5\frac{p_2}{p_1}; 0,5\right).$$

Así, $\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2) \gg 0$ es un vector de precios de equilibrio si y solo si $\overline{p}_1 = \overline{p}_2 = 0.5$. Entonces, en equilibrio, las asignaciones óptimas son $x^1(\overline{p}, \overline{p} \cdot w^1) = x^2(\overline{p}, \overline{p} \cdot w^2) = (0,5; 0,5)$. $\square$

Ejemplo 2. Suponga que $(m, n) = (2, 2)$ y que los individuos tienen preferencias representables por las funciones de utilidad $u^1(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ y $u^2(x_1, x_2) = \min\{x_1; x_2\}$, donde $\alpha \in (0, 1)$. Si las asignaciones iniciales de mercancías son dadas por $w^1 = (0, 1)$ y $w^2 = (1, 0)$ entonces las demandas individuales a precios $p = (p_1, p_2) \gg 0$ son:

$$x^1(p, p \cdot w^1) = \left(\alpha\frac{p \cdot w^1}{p_1}; (1-\alpha)\frac{p \cdot w^1}{p_2}\right), \qquad x^2(p, p \cdot w^2) = \left(\frac{p \cdot w^2}{p_1 + p_2}, \frac{p \cdot w^2}{p_1 + p_2}\right).$$

Luego, normalizando la suma de los precios igual a uno, $(\overline{p}_1, \overline{p}_2) \gg 0$ será un equilibrio si y solamente si $\alpha - (1 + \alpha)\overline{p}_1 + \overline{p}_1^2 = 0$. Así, $\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2) = (\alpha, 1 - \alpha)$. Las asignaciones de equilibrio (demandas Marshallianas) son $x^1(\overline{p}, \overline{p} \cdot w^1) = (1 - \alpha, 1 - \alpha)$ y $x^2(\overline{p}, \overline{p} \cdot w^2) = (\alpha, \alpha)$. $\square$

En los ejemplos anteriores existía un único equilibrio Walrasiano, lo cual no siempre es verdad como mostraremos en el Ejemplo 3. Además, hasta ahora siempre restringimos nuestra búsqueda a precios de equilibrio estrictamente positivos. De hecho, si algún precio de equilibrio fuera cero, no existirían consumos óptimos para los individuos que tienen preferencias estrictamente monótonas. En el Ejemplo 4 mostramos que los precios de equilibrio pueden ser cero si los consumidores solo tienen preferencias localmente no-saciables.

EJEMPLO 3. Suponga que $(m, n) = (2, 2)$ y que los individuos tienen preferencias idénticas y representables por una función de utilidad Leontief, $u(x_1, x_2) = \min\{x_1; x_2\}$. Si las asignaciones individuales son $w^1 = (1, 0)$ y $w^2 = (0, 1)$, entonces las demandas marshallianas a precios $p = (p_1, p_2) \gg 0$, con $p_1 + p_2 = 1$, son dadas por $x^1(p, p \cdot w^1) = (p_1, p_1)$ y $x^2(p, p \cdot w^2) = (p_2, p_2)$.

Así, por construcción, cualquier vector $\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2) \gg 0$ tal que $\overline{p}_1 + \overline{p}_2 = 1$ es un precio de equilibrio. Por lo tanto, existen infinitos precios e infinitas asignaciones de equilibrio. $\square$

Hemos dado ejemplos donde la oferta se iguala a la demanda en equilibrio. Sin embargo, esta propiedad no siempre se cumple.

EJEMPLO 4. Considere una economía con dos consumidores y dos mercancías. Los dos individuos tienen las mismas preferencias, representadas por la función de utilidad Leontief $u(x_1, x_2) = \min\{x_1; x_2\}$. Las asignaciones iniciales son $w^1 = (0, 1)$ y $w^2 = (4, 2)$.

En este caso, salvo normalización, existe un único precio de equilibrio: $\overline{p} = (0, 1)$. De hecho, si los precios de equilibrio fueran estrictamente positivos, entonces los individuos demandarían la misma cantidad de cada mercancía. Al agregar las demandas, existiría exceso de oferta en el mercado de la primera mercancía–el mercado con mayor oferta agregada. Como las preferencias son localmente no-saciables, concluiríamos que el precio de la primera mercancía es cero (vea los comentarios después del Ejemplo 5). Una contradicción. Así, quedan dos posibles candidatos a precios de equilibrio (salvo normalización) $\overline{p} = (0, 1)$ y $\tilde{p} = (1, 0)$. Es fácil verificar que solamente $\overline{p}$ es precio de equilibrio.

Asociado al único precio de equilibrio existirán infinitos equilibrios Walrasianos. De hecho, junto con $\overline{p}$, las asignaciones $(x^1; x^2) = ((\gamma, 1); (\delta, 2))$ constituyen un equilibrio Walrasiano si $\gamma \geq 1$, $\delta \geq 2$ y $\gamma + \delta \leq 4$. Cuando $\gamma + \delta < 4$, en equilibrio existe exceso de oferta de la primera mercancía. Note que la multiplicidad de equilibrios no tiene efectos reales sobre los consumidores: independiente del equilibrio escogido, el nivel de utilidad de cada consumidor es el mismo. $\square$

EJEMPLO 5. Diferente a lo que ocurre en los ejemplos anteriores, puede no existir un equilibrio Walrasiano. Como ejemplo, considere una economía con dos consumidores y dos mercancías. Las funciones de utilidad son $u^1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$ y $u^2(x_1, x_2) = x_1$. Las asignaciones iniciales son $w^1 = (0, 1)$ y $w^2 = (1, 0)$.

Note que el individuo $i = 2$ solo se interesa por el consumo del primer bien, del cual él tiene como asignación inicial toda la oferta que hay en la economía. Por lo tanto, en caso que exista un equilibrio, $i = 2$ siempre va a consumir la canasta $(1, 0)$. Por otro lado, como el individuo $i = 1$ tiene preferencias estrictamente monótonas, solo precios estrictamente positivos para ambas mercancías son compatibles con equilibrio (en otro caso, no existiría un óptimo individual). Luego, el primer individuo tendría, en equilibrio, una renta estrictamente positiva, la cual él siempre utilizaría para demandar una cantidad estrictamente positiva de la primera mercancía. Por lo tanto, en equilibrio existiría exceso de demanda por la mercancía $l = 1$. Una contradicción. $\square$

Como hemos visto, dependiendo de las preferencias individuales y de las asignaciones iniciales de mercancías, puede existir o no un equilibrio Walrasiano. Además, cuando existe un equilibrio, este no necesariamente es único. Tampoco podemos garantizar que los precios de equilibrio sean estrictamente positivos, ni que la oferta de mercancías se iguale a la demanda agregada en todos los mercados.

En relación a este último punto, si los individuos tienen preferencias localmente no saciables, en equilibrio podrá aparecer exceso de oferta solo para aquellas mercancías con precio cero. De hecho, independiente del vector de precios, cada consumidor va a gastar toda su renta. Así, para cada $p \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ tendremos que $p \cdot \sum_{i=1}^m \left(x^i(p, p \cdot w^i) - w^i\right) = 0$ (Ley de Walras).

Como consecuencia de la Ley de Walras, en un equilibrio existirá exceso de oferta por la mercancía $l \in \{1, \ldots, n\}$ solo si su precio es cero (como en el Ejemplo 4). En símbolos, cuando los consumidores son localmente no saciadas, si $\overline{p} = (\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_n)$ denota un precio de equilibrio, entonces para cada $l \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que,

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \left(x_l^i(\overline{p}, \overline{p} \cdot w^i) - w_l^i\right) < 0\right) \quad \Longrightarrow \quad (\overline{p}_l = 0)\,.$$

Ahora, si existe al menos un individuo que tiene preferencias estrictamente monótonas por el consumo de la mercancía l, entonces en cualquier equilibrio Walrasiano el precio de esta mercancía es estrictamente positivo. Por lo tanto, si para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$ existe un individuo con preferencias estrictamente monótonas en el consumo de la mercancía l, en equilibrio la oferta y la demanda se igualan en todos los mercados.[6] Monotonía estricta es

[6] Es suficiente tener un individuo con preferencias estrictamente monótonas (vea los Ejemplos 1 y 2).

solo una condición suficiente para eliminar exceso de oferta, de hecho en el Ejemplo 3 los agentes solo tenían preferencias localmente no saciadas.

Otra propiedad interesante, la cual nos permite reducir los pasos para encontrar un equilibrio, es la siguiente:

Si los individuos tienen preferencias localmente no-saciables y para un vector de precios $\overline{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ *la oferta iguala a la demanda en* $m-1$ *de los* m *mercados existentes, entonces* $\overline{p}$ *es un precio de equilibrio.*[7]

En particular, si todas las preferencias son localmente no-saciables y hay solo dos mercancías en la economía, para encontrar un equilibrio es suficiente equilibrar la oferta y la demanda en un mercado (vea los Ejemplos 1, 2 y 3).

Condiciones generales sobre las características de la economía para garantizar la existencia de equilibrio son dadas por el siguiente resultado:

Teorema (Existencia de Equilibrio Walrasiano)
Considere una economía de intercambio con m consumidores y n mercancías. Suponga que las mercancías son perfectamente divisibles y que las preferencias de cada individuo son localmente no saciadas y representables por una función de utilidad $u^i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ continua y fuertemente cuasicóncava. Además, asuma que $\sum_{i=1}^m w^i \gg 0$, donde $w^i \in \mathbb{R}^n_+$ es la asignación inicial de recursos del individuo $i \in \{1, \dots, m\}$. Si alguna de las siguientes condiciones es satisfecha,

(a) Las asignaciones iniciales $w^i \gg 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

(b) Cada individuo tiene preferencias estrictamente monotónas.

entonces existe un equilibrio Walrasiano.

Demostración. (a) Defina los conjuntos $K = \{z \in \mathbb{R}^n_+ : z_l \leq 2\sum_{i=1}^m w^i_l, \forall\, l \in \{1, \dots, n\}\}$ y $\Delta := \{z \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{l=1}^n z_l = 1\}$. Considere un juego generalizado entre los consumidores y un jugador abstracto. Cada consumidor i toma los precios de las mercancías como dados, $p \in \Delta$, y maximiza su utilidad $u^i(x)$ escogiendo canastas $x \in B^i(p, K) := \{x \in K : p \cdot x \leq p \cdot w^i\}$. El jugador abstracto toma las demandas de los individuos como

[7] Pruebe esta propiedad utilizando la Ley de Walras.

dadas, $(x^i(p))_{1\leq i\leq m} \in K^m$, y escoge precios $p \in \Delta$ de tal forma de maximizar la función $p \cdot \sum_{i=1}^m \left(x^i(p) - w^i(p)\right)$.

Note que el conjunto Δ es compacto, convexo y diferente de vacío. Así, la correspondencia de estrategias admisibles del jugador abstracto es continua y tiene valores compactos, convexos y diferentes de vacío. Por otro lado, como el conjunto K es compacto, convexo y diferente de vacío, la correspondencia de estrategias admisibles de cada consumidor $i \in \{1,\ldots,m\}$ es continua y tiene valores compactos, convexos y diferentes de vacío (verifique estas propiedades detalladamente utilizando la Proposición 8—note que es fundamental la hipótesis (a) para garantizar la hemicontinuidad inferior de la correspondencia $B(\cdot,K)$). Por lo tanto, como las funciones objetivo de todos los jugadores son continuas y cuasicóncavas en la propia estrategia, el Teorema de Existencia de Equilibrio en un Juego Social nos garantiza que existe un vector $\left(\overline{p};(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}\right) \in \Delta \times K^m$ tal que,

$$\begin{aligned} \overline{x}^i &\in \operatorname{argmax}_{x\in B^i(\overline{p},K)} u^i(x), \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\}, \\ p \cdot \sum_{i=1}^m \left(\overline{x}^i - w^i\right) &\leq \overline{p} \cdot \sum_{i=1}^m \left(\overline{x}^i - w^i\right), \quad \forall p \in \Delta. \end{aligned}$$

Ahora, como $\overline{x}^i \in B^i(\overline{p},K)$, $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$, sigue que $\overline{p} \cdot \sum_{i=1}^m \left(\overline{x}^i - w^i\right) \leq 0$. Por lo tanto, para cada $p \in \Delta$, $p \cdot \sum_{i=1}^m \left(\overline{x}^i - w^i\right) \leq 0$. En particular, $\sum_{i=1}^m \left(\overline{x}^i - w^i\right) \leq 0$. Así, para probar que $\left(\overline{p};(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}\right) \in \Delta \times K^m$ es un equilibrio Walrasiano es suficiente mostrar que, para cada consumidor i,

$$u^i(\overline{x}^i) \geq u^i(x),\ \forall x \in B^i(\overline{p}) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \overline{p}\cdot x \leq \overline{p}\cdot w^i\}.$$

Suponga, por contradicción, que existe un consumidor $i \in \{1,\ldots,m\}$ tal que, para alguna canasta $y \in B^i(\overline{p})$, $u^i(y) > u^i(\overline{x}^i)$. Como $\overline{x}^i$ está en el interior del conjunto K, sabemos que existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $z_\lambda := \lambda\overline{x}^i + (1-\lambda)y \in B^i(\overline{p},K)$. La cuasiconcavidad fuerte de u^i implica que $u^i(z_\lambda) > u^i(\overline{x}^i)$, lo cual contradice la optimalidad de $\overline{x}^i$ en $B^i(\overline{p},K)$.

(b) Es posible que para algunos consumidores las asignaciones iniciales no estén en el interior de $\mathbb{R}^n_+$. Así, vamos a definir para cada $T \in \mathbb{N}$ una nueva economía, $\mathcal{E}^T$, con las mismas características de la economía original excepto por las asignaciones iniciales, las cuales son dadas por $w^{i,T} = w^i + \frac{1}{T}\sum_{k=1}^m w^k$, $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$.

Para cada $T \in \mathbb{N}$, el vector $(w^{i,T})_{i\in\{1,\ldots,m\}} \in \mathbb{R}^n_{++}$. Por lo tanto, existe un equilibrio Walrasiano $\left(\overline{p}^T;(\overline{x}^{i,T})_{i\in\{1,\ldots,m\}}\right) \in \Delta \times K^m$ de $\mathcal{E}^T$. Como $\Delta \times K^m$ es compacto, la secuencia de equilibrios $\left(\overline{p}^T;(\overline{x}^{i,T})_{i\in\{1,\ldots,m\}}\right)_{T\in\mathbb{N}}$ va a tener una subsecuencia convergente. Vamos a denotar por $\left(\overline{p};(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}\right)$ el límite de esta subsecuencia.

Como para cada $T \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{m} \left(\overline{x}^{i,T} - w^{i,T}\right) \leq 0$, sigue que $\sum_{i=1}^{m} \left(\overline{x}^{i} - w^{i}\right) \leq 0$. Así, para obtener el resultado es suficiente probar que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, la canasta $\overline{x}^i$ maximiza u^i en $B^i(\overline{p})$. Esto es,

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}: \; u^i(x) > u^i(\overline{x}^i) \implies \overline{p} \cdot x > \overline{p} \cdot w^i.$$

Suponga que, para algún consumidor i, existe una canasta $x \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $u^i(x) > u^i(\overline{x}^i)$. Entonces, por la continuidad de la función u^i sabemos que existe $\overline{T} \in \mathbb{N}$ tal que $u^i(x) > u^i(\overline{x}^{i,T})$, $\forall T \geq \overline{T}$. Luego, $\overline{p}^T \cdot x > \overline{p}^T \cdot w^{i,T}$, $\forall T \geq \overline{T}$. Haciendo el límite cuando T va para infinito obtenemos que $\overline{p} \cdot x \geq \overline{p} \cdot w^i$. Esto es,

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}: \; u^i(x) > u^i(\overline{x}^i) \implies \overline{p} \cdot x \geq \overline{p} \cdot w^i.$$

Finalmente, como $\sum_{i=1}^{n} w^i \gg 0$, existe por lo menos un consumidor i_0 tal que $\overline{p} \cdot w^{i_0} > 0$. Suponga que existe $x \in \mathbb{R}^m_+$ tal que $u^{i_0}(x) > u^{i_0}(\overline{x}_{i_0})$. Si $\overline{p} \cdot x = \overline{p} \cdot w^{i_0}$, por la continuidad de u^i sabemos que existe $\theta \in (0,1)$ tal que $u^{i_0}(\theta x) > u^{i_0}(\overline{x}_{i_0})$ y, por lo tanto, $\overline{p} \cdot (\theta x) \geq \overline{p} \cdot w^{i_0} = \overline{p} \cdot x > 0$, una contradicción. Esto es, $\overline{x}^{i_0}$ es una canasta óptima para el consumidor i_0 a precios $\overline{p}$. Como i_0 tiene preferencias estrictamente monótonas, sigue que $\overline{p} \gg 0$, lo que implica que $\overline{p} \cdot w^i > 0$, $\forall i \{1, \ldots, m\}$. Por lo tanto, para finalizar la demostración es suficiente repetir los argumentos hechos para el consumidor i_0 para cada individuo $i \in \{1, \ldots, m\}$. □

Note que las condiciones (a) y (b) son requerimientos *suficientes* para la existencia de equilibrio. Esto es, cuando la economía no satisface ninguna de las dos condiciones, puede o no existir un equilibrio Walrasiano (revise los Ejemplos 4 y 5).

Análisis gráfico de equilibrio: la caja de Edgeworth

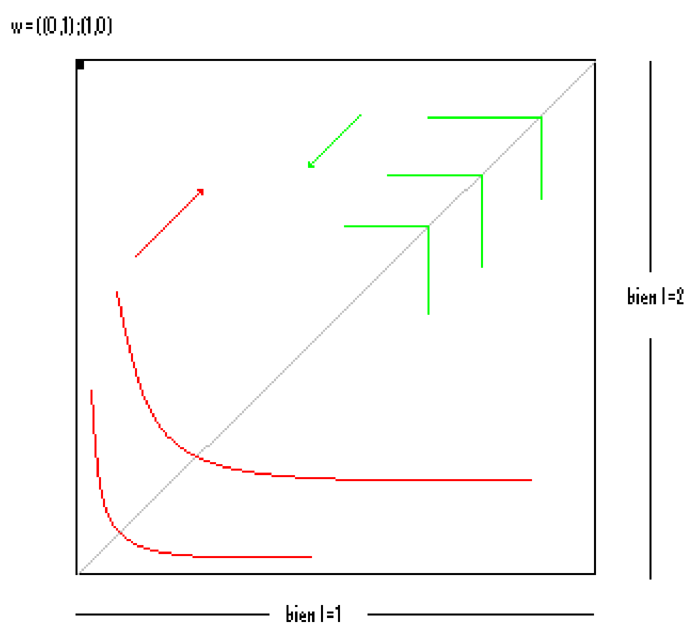
Cuando existen solo dos individuos y dos mercancías, el análisis de equilibrio general puede ser hecho de forma gráfica, utilizando la *Caja de Edgeworth*.

Esta "caja" es un rectángulo cuyo largo es igual a la oferta agregada del primer bien y cuya altura es igual a la oferta agregada del segundo bien. Esto es, si las asignaciones iniciales de cada individuo son $w^1 = (w_1^1, w_2^1)$ y $w^2 = (w_1^2, w_2^2)$ entonces la caja de Edgeworth es un rectángulo de $W_1 := (w_1^1 + w_1^2)$ por $W_2 := (w_2^1 + w_2^2)$.

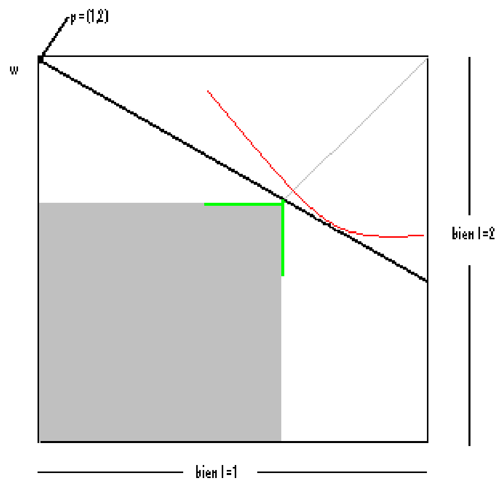
Ahora, todo punto de la caja de Edgeworth va a representar un par de canastas de consumo, una para cada consumidor. Esto es, el punto (x_1, x_2), donde $x_1 \in [0, w_1^1 + w_1^2]$ y $x_2 \in [0, w_2^1 + w_2^2]$ representa el par de canastas (x_1, x_2) y $(W_1 - x_1, W_2 - x_2)$. La primera se la asignaremos al individuo $i = 1$ y la otra al consumidor $i = 2$. Dicho de otra forma, dado cualquier punto en la caja de Edgeworth, el individuo $i = 1$ mide su asignación de mercancías desde la esquina inferior izquierda hacia el interior de la caja, mientras que el individuo $i = 2$ lo hace desde la esquina superior derecha hacia el interior de la caja. Por lo tanto, cada punto en la caja de Edgeworth es una posible *distribución* de los recursos de la economía entre los dos individuos. En particular, las asignaciones iniciales de los individuos determinan un punto en la caja.

Si los individuos tienen utilidades estrictamente monótonas entonces, mientras mas alejado este un punto en la caja de Edgeworth de la esquina inferior izquierda, mayor va a ser la utilidad del consumidor $i = 1$. El consumidor $i = 2$ tendrá mayor utilidad en aquellos puntos que están mas cerca de la esquina inferior izquierda.

A continuación, graficamos la caja de Edgeworth para la economía del Ejemplo 2 con $\alpha = 0,7$. Note la direccíon en la que aumentan las curvas de indiferencia de cada individuo.

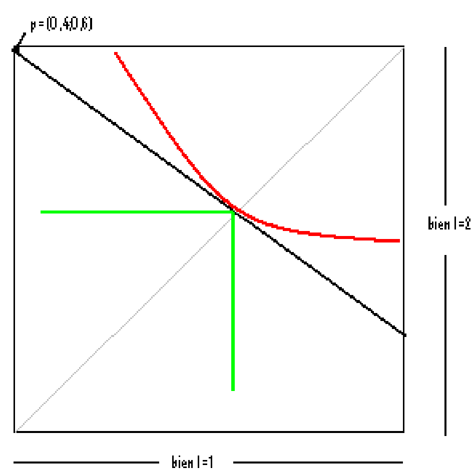


Por construcción, si fijamos un vector de precios para las mercancías $p = (p_1, p_2)$, las rectas presupuestarias de los individuos ocupan el mismo lugar geométrico dentro de la caja de Edgeworth. Por ejemplo, en la siguiente figura se diseñan las rectas presupuestarias, y los óptimos individuales, para la economía del Ejemplo 2 con $\alpha = 0,4$ y $p = (1, 2)$.



Vamos a tener un equilibrio a precios (p_1, p_2) si y solo si la asignación óptima del individuo $i = 1$ está en la región sombreada de la Figura 2. En el caso particular que al menos una preferencia es estrictamente monótona, tendremos un equilibrio solo cuando las asignaciones individuales óptimas puedan ser representadas por el mismo punto en la caja de Edgeworth. Así, como ya lo sabíamos, para la economía del Ejemplo 2, $p = (1, 2)$ no es un equilibrio cuando $\alpha = 0,4$.

La próxima figura muestra la caja de Edgeworth y la asignación de equlibrio para la economía descrita en el Ejemplo 2 con $\alpha = 0,4$.



Ejercicios

(1) Considere una economía de intercambio estática con n individuos y m mercancías, donde los individuos tienen asignaciones iniciales interiores (cantidades positivas de todas las mercancías). Suponga que cada individuo debe consumir, al menos, la mitad de su asignación inicial de recursos.

(i) Escriba el problema de cada consumidor y defina equilibrio.
(ii) Normalizando los precios de las mercancías en el simplex, muestre que la correspondencia de asignaciones presupuestariamente factibles tiene gráfico cerrado.
(iii) Haga las hipótesis necesarias sobre las características de la economía y demuestre la existencia de un equilibrio competitivo.

(2) Analice los Ejemplos 1, 3, 4 y 5 utilizando la caja de Edgeworth.

(3) Considere una economía de intercambio estática con $2n+1$ consumidores. Existen dos mercancías indivisibles, zapatos derechos (D) y zapatos izquierdos (I). Cada consumidor tiene un zapato y existen $n+1$ zapatos derechos. Todos los individuos tienen la misma función de utilidad $u(I,D) = \min\{I,D\}$. Encuentre los equilibrios Walrasianos de esta economía.

(4) Considere una economía de intercambio con dos individuos y dos mercancías. El individuo 1 tiene una función de utilidad $u_1(x_{1,1};x_{1,2}) = \sqrt{x_{1,1}} + \sqrt{x_{1,2}}$ y su asignación inicial de recursos es $w^1 = (2,0)$. La función de utilidad del individuo 2 es $u^2(x_{2,1};x_{2,2}) = \min\{2x_{2,1};x_{2,2}\}$ y sus asignaciones iniciales son $w^2 = (2,4)$.

Los espacios de consumo de cada individuo son $X_1 = X_2 = [0,10]\times[0,10]$. Normalice los precios de tal forma que $p_1 + p_2 = 1$.

(i) Muestre que, en $p = (0,1)$ la correspondencia presupuestaria del individuo 1 no es continua y su demanda no es hemicontinua superior.
(ii) ¿Existe un equilibrio Walrasiano para esta economía?
(iii) ¿Cambia la respuesta del ítem anterior si $u^2(x_{2,1};x_{2,2}) = x_{2,2}$?
(iv) ¿Cambia la respuesta en (ii) si $u^2(x_{2,1};x_{2,2}) = x_{2,2}$ y $X_1 = X_2 = [0,4]\times[0,4]$?

Ejercicios Avanzados

Equilibrio con Impuestos al Consumo

Considere una economia estática con m consumidores y n mercancías. Cada consumidor i tiene asignaciones iniciales $w^i \in \mathbb{R}^n_{++}$. Además, las preferencias de cada consumidor son representables por funciónes de utilidad continuas, estríctamente cuasicóncavas y estríctamente crecientes.

A diferencia del modelo clásico, asuma que los individuos pagan un *impuesto al consumo*, el cual es dado por tasas *exógenas* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \geq 0$ de tal forma que, dados precios $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+$ para las mercancías, cada agente $i \in \{1, \dots, m\}$ puede demandar las canastas $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ tales que

$$\sum_{l=1}^{n} (1 + \lambda_l) p_l x_l \leq p \cdot w^i + \frac{s}{m},$$

donde $s \geq 0$ representa la recaudación fiscal, la cual se divide *equitativamente* entre los agentes. Note que, además de tomar los precios como dados, los consumidores adelantan perfectamente la recaudación fiscal (parte de la cual se agrega a su renta monetaria). Pruebe la existencia de equilibrio.

Observación. Si va a utilizar un juego generalizado, le recomendamos agregar un jugador abstracto que, dadas las demandas por consumo, escoje la variable s, en un conjunto adecuado, de tal forma de minimizar la función $-\left(s - \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \lambda_l p_l x_l\right)^2$.

Equilibrio con Impuestos a la Renta

Considere una economía Walrasiana de intercambio con N consumidores y L mercancías. A diferencia de la situación clásica, existe un impuesto a la renta progresivo en esta economía. Así, todos los consumidores que tienen una renta superior a la media de la economía contribuyen a un fondo común, entregando la mitad del excedente de su renta por sobre la renta media del mercado. Los recursos de este fondo se distribuyen entre los individuos que tiene rentas inferiores a la renta media. Las transferencias de recursos hacia los individuos son proporcionales a la diferencia entre sus rentas y la media de ingresos en la economía.

(i) Suponga que $N = L = 2$ y que la renta de cada individuo es dada por el valor de mercado de su canasta de recursos iniciales, con $w^1 = (1, 2)$ y $w^2 = (2, 1)$. Encuentre la riqueza inicial de cada individuo después de impuestos, como función de los precios unitarios de las mercancías.

(ii) Considere el caso general, donde las asignaciones iniciales de mercancías son dadas por vectores $w^i \in \mathbb{R}^l_{++}$. Dado un precio $p \in \mathbb{R}^L_+ \setminus \{0\}$, denote por $\overline{m}(p)$ la renta monetária media de la economía. Muestre que la renta neta (después de impuestos) del individuo $i \in \{1, \ldots, N\}$ es dada por,

$$m^i(p) = \min\left\{p \cdot w^i, \overline{m}(p)\right\} + \frac{1}{2}\max\left\{p \cdot w^i - \overline{m}(p), 0\right\} + \frac{T_i(p)}{2}\sum_{j=1}^{N}\max\left\{p \cdot w^j - \overline{m}(p), 0\right\},$$

donde $T_i(p)$ es la proporción de los recursos (impuestos) que el individuo i recibe. Esto es, si $N^*(p)$ es el conjunto de consumidores que a precios p tienen una renta monetária menor que la renta media de la economía y $n^*(p)$ denota el número de elementos del conjunto $N^*(p)$,

$$T_i(p) = \frac{\max\left\{\overline{m}(p) - p \cdot w^i, 0\right\}}{n^*(p)\,\overline{m}(p) - \sum_{j \in N^*(p)} p \cdot w^j}.$$

(iii) Muestre que la función $m^i : \mathbb{R}^L_{++} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ es estrictamente positiva y continua.

Suponga que cada uno de los N consumidores es caracterizado por una asignación inicial de recursos $w^i \in \mathbb{R}^L_{++}$ y por una función de utilidad $u^i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}_+$ continua, estríctamente cóncava y estríctamente creciente.

Sea $\Delta = \{p = (p_1, \ldots, p_L) \in \mathbb{R}^L_+ : \sum_{l=1}^{L} p_l = 1\}$ y $B^i : \Delta \twoheadrightarrow \mathbb{R}^L_+$ la correspondencia que asocia a cada $p \in \Delta$ el conjunto de canastas $x \in \mathbb{R}^L_+$ que satisfacen las restricciones: $p \cdot x \leq m^i(p)$; $0 \leq x \leq 2\sum_{j=1}^{N} w^j$.

(iv) Muestre que para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, la correspondencia B^i es continua y tiene valores compactos, convexos y diferentes de vacío.

(v) Muestre que siempre existe al menos un equilibrio Walrasiano en la economía.

Mercados Financieros Completos

Considere una economía dinámica con dos periodos y sin incertidumbre. Hay dos consumidores y una única mercancía (perfectamente divisible y no almacenable), la cual puede ser demandada en cada periodo $t \in \{0, 1\}$ a un precio unitario $p_t > 0$. Cada consumidor $i \in \{1, 2\}$ tiene asignaciones iniciales $(w^i_0, w^i_1) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}$, con $\sum_{i=1}^{2} w^i_0 > 0$ y $\sum_{i=1}^{2} w^i_1 > 0$. Las preferencias de cada consumidor son representables por funciones de utilidad continuas, estríctamente cuasicóncavas y estríctamente crecientes. Suponga que en $t = 0$, además de demandar la mercancía, cada consumidor puede negociar un activo que tiene un precio unitario $q > 0$ y genera el derecho de recibir (o bien, la obligación de pagar) $R > 0$ unidades de la mercancía en $t = 1$. En estas condiciones, demuestre la existencia de un equilibrio competitivo.

Mercados Financieros Incompletos

Considere una economía $\mathcal{E}$ con dos periodos, denotados por $t \in \{0, 1\}$, e incertidumbre sólo en el periodo $t = 1$, donde existen S estados de la naturaleza que se pueden realizar. Hay m individuos y una única mercancía (perfectamente divisible y no almacenable) la cual puede ser demandada para consumo en ambos periodos. Denotaremos por $p_0 \geq 0$ el precio de la mercancía en $t = 0$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que en cada estado de la naturaleza $s \in \mathcal{S} := \{1, \ldots, S\}$ el precio de la mercancía es igual a uno.

Los individuos saben que se realizará uno y sólo uno de los estados de la naturaleza del conjunto $\mathcal{S}$, pero no tienen información suficiente para saber cual de ellos será. Por esta razón, además de demandar la mercancía para su consumo en $t = 0$, cada individuo hará planes de consumo contingente a cada estado de la naturaleza que se pueda realizar en $t = 1$. Supondremos que cada $i \in \mathcal{I} := \{1, \ldots, m\}$ conoce la cantidad de mercancía que tendrá en $t = 0$ y en cada estado futuro (caso este se realice). Esto es, conoce su asignación inicial de recursos $w^i = (w_0^i, w_1^i, \ldots, w_S^i) \in \mathbb{R}_{++}^{S+1}$. Además, cada individuo $i \in \mathcal{I}$ le asigna una probabilidad de realización a cada estado de la naturaleza $s \in \mathcal{S}$. Esto es, basado en su experiencia, el individuo i cree que el estado de la naturaleza $s \in \mathcal{S}$ se realizará con una probabilidad $\pi_s^i > 0$, donde $\sum_{s \in \mathcal{S}} \pi_s^i = 1$.

Cuando un individuo $i \in \mathcal{I}$ decide consumir una cantidad x de la mercancía en el periodo $t = 0$, o en un estado de la naturaleza $s \in \mathcal{S}$, él recibe una utilidad instantánea $u^i(x)$, donde $u^i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ en una función continua, estríctamente cuasicóncava y estríctamente creciente. Así, la utilidad que recibe el agente i al demandar un plan de consumo $\left(x_0^i, (x_s^i)_{s \in \mathcal{S}}\right)$ es $U^i\left(x_0^i, (x_s^i)_{s \in \mathcal{S}}\right) = u^i(x_0^i) + \sum_{s \in \mathcal{S}} \pi_s^i\, u^i(x_s^i)$.

Suponga que en $t = 0$, además de demandar la mercancía para consumo inmediato, cada individuo puede transferir renta al comprar (resp. vender) un activo, el cual tiene un precio unitario $q \geq 0$, generando el derecho (resp. la obligación) de recibir (resp. pagar) $R_s \geq 0$ unidades de mercancía en cada estado $s \in \{1, \ldots, S\}$, donde $(R_s)_{s \in \mathcal{S}} \neq 0$.

Dados precios $(p_0, q) \in \mathbb{R}_+^2$, diremos que un plan de consumo $\left(x_0^i, (x_s^i)_{s \in \mathcal{S}}\right)$ es presupuestariamente factible para el individuo i a precios (p_0, q) si, para algún $z \in \mathbb{R}$ (llamado de portafolio financiero), las siguientes restricciones son satisfechas:

$$
\begin{aligned}
p_0 x_0^i + qz &\leq p_o w_0^i; \\
x_s^i &\leq w_s^i + R_s z, \quad \forall s \in \mathcal{S}; \\
\left(x_0^i, (x_s^i)_{s\in\mathcal{S}}\right) &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Un *equilibrio competitivo* de la economía $\mathcal{E}$ es dado por un vector de precios $(\overline{p}_0, \overline{q})$ junto con planes de consumo $\left(\overline{x}_0^i, (\overline{x}_s^i)_{s\in\mathcal{S}}\right)_{i\in\mathcal{I}}$ tales que:

(i) Para cada $i \in \mathcal{I}$, $\left(\overline{x}_0^i, (\overline{x}_s^i)_{s\in\mathcal{S}}\right)$ es presupuestariamente factible a precios $(\overline{p}_0, \overline{q})$.

(ii) Para cada $i \in \mathcal{I}$, y para todo plan de consumo $\left(x_0^i, (x_s^i)_{s\in\mathcal{S}}\right)$ presupuestariamente factible a precios $(\overline{p}_0, \overline{q})$, $U^i\left(\overline{x}_0^i, (\overline{x}_s^i)_{s\in\mathcal{S}}\right) \geq U^i\left(x_0^i, (x_s^i)_{s\in\mathcal{S}}\right)$.

(iii) La oferta se iguala a la demanda,

$$
\sum_{i\in\mathcal{I}} \left(\overline{x}_s^i - w_s^i\right) = 0, \quad \forall s \in \{0\} \cup \mathcal{S}.
$$

El objetivo de este ejercicio es estudiar la existencia de equilibrio en la economía con mercados incompletos. Así, basado en la descripción de la economía $\mathcal{E}$ y considerando las hipótesis subyacentes, muestre que:

(1) *En todo equilibrio competitivo de $\mathcal{E}$, $\overline{q} > 0$ y $\sum_{i\in\mathcal{I}} \overline{z}^i = 0$, donde $\overline{z}^i$ denota el portafolio financiero de equilibrio del individuo i.*

(2) *Existen cotas superiores e inferiores para los portafolios financieros de equilibrio, las cuales no dependen de los individuos ni del equilibrio escogido. Esto es, demuestre que existe $A \in \mathbb{R}_+$ tal que, independiente del equilibrio (caso exista más de uno) los portafolios financieros, $(\overline{z}^i)_{i\in\mathcal{I}}$, satisfacen $-A \leq \overline{z}^i \leq A$, $\forall i \in \mathcal{I}$.*

(3) *Sea $\Delta = \{(p_0, q) \in \mathbb{R}_+^2 : p_0 + q = 1\}$ y $B^i : \Delta \twoheadrightarrow \mathbb{R}_+^{S+1} \times \mathbb{R}$ una correspondencia que asocia a cada vector de precios $(p_0, q) \in \Delta$ el conjunto de planes $[(x_0, (x_s)_{s\in\mathcal{S}}); z]$ que satisfacen*

$$
\begin{aligned}
p_0 x_0^i + qz &\leq p_o w_0^i; \\
x_s^i &\leq w_s^i + R_s z, \quad \forall s \in \mathcal{S}; \\
\left(x_0^i, (x_s^i)_{s\in\mathcal{S}}\right) &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Suponga que las correspondencias $(B^i)_{i\in\mathcal{I}}$ tienen gráfico cerrado y son hemicontinuas inferiores. Demuestre que siempre existe un equilibrio competitivo para $\mathcal{E}$.

Mercados Incompletos e Información Diferenciada

Considere una economía $\mathcal{E}$ con dos periodos, denotados por $t \in \{0,1\}$, e incertidumbre sólo en $t = 1$, donde un estado de la naturaleza $s \in \{1,2,3\}$ se realiza. Hay dos individuos y una única mercancía (perfectamente divisible y no almacenable) la cual puede ser demandada para consumo en ambos periodos. Denotamos por $p_0 \geq 0$ el precio de la mercancía en $t = 0$. En cada estado $s \in \{1,2,3\}$ normalizamos el precio unitario de la mercancía haciéndolo igual a uno. Por conveniencia de notación, $s = 0$ denota el único estado de la naturaleza en $t = 0$.

Los individuos saben que en $t = 1$ se realizará uno y sólo uno de los estados de la naturaleza, pero no tienen información suficiente para saber cual de ellos será. Por esta razón, además de demandar la mercancía en $t = 0$, harán planes de consumo contingente. Cuando un individuo $i \in \{1,2\}$ decide consumir una cantidad $x^i_s \geq 0$ de la mercancía en el estado de la naturaleza $s \in \{0,1,2,3\}$, sabe que recibirá una utilidad instantánea $u^i(x) = \ln(x+1)$.

Ambos individuos descuentan el futuro a una tasa $\beta \in (0,1)$ y cada $i \in \{1,2\}$ le asigna una probabilidad de realización a cada $s \in \{1,2,3\}$. Esto es, basado en su experiencia, el individuo i cree que el estado $s \in \{1,2,3\}$ se realizará con una probabilidad $\pi^i_s > 0$, donde $\sum_{s=1}^{3} \pi^i_s = 1$.

Por lo tanto, la utilidad que recibe $i \in \{1,2\}$ al demandar un plan de consumo no-negativo $\left(x^i_0, (x^i_s)_{s\in\{1,2,3\}}\right)$ viene dada por, $U^i\left(x^i_0, (x^i_s)_{s\in\{1,2,3\}}\right) = \ln(1+x^i_0) + \beta \sum_{s\in\{1,2,3\}} \pi^i_s \ln(1+x^i_s)$. Cada individuo $i \in \{1,2\}$ tiene una asignación inicial de recursos (contingente a los estados de la naturaleza) $w^i = (w^i_0, w^i_1, w^i_2, w^i_3) \in \mathbb{R}^4_{++}$.

La información sobre la realización de los estados de la naturaleza es *diferenciada*. Esto es, el individuo $i = 1$ observa la realización del estado de la naturaleza, mientras que el individuo $i = 2$ no distingue entre los estados $\{1,2\}$. Para que esto haga sentido, suponemos que $w^2_1 = w^2_2$. En otro caso, $i = 2$ podría distinguir entre los dos estados al observar los recursos que recibe.

Hay mercados financieros *reales e incompletos*: en el primer periodo, además de demandar la mercancía para consumo inmediato, cada individuo puede transferir renta al comprar (vender) un activo, el cual tiene un precio unitario $q \geq 0$, generando el derecho (la obligación) de recibir (pagar) $R_s \geq 0$ unidades de la mercancía en cada estado $s \in \{1,2,3\}$. Asumiremos que $(R_1, R_2, R_3) \neq 0$ y $R_1 = R_2$.

Dados precios $(p_0, q) \in \mathbb{R}^2_+$, diremos que un plan de consumo $\left(x_0^i, (x_s^i)_{s\in\{1,2,3\}}\right)$ junto con una posición financiera z^i son presupuestariamente factibles para el individuo i a precios (p_0, q) si las siguientes restricciones son satisfechas:

$$\begin{aligned} p_0 x_0^i + q z^i &\leq p_0 w_0^i; \\ x_s^i &\leq w_s^i + R_s z^i, \quad \forall s \in \{1,2,3\}; \\ \left(x_0^i, (x_s^i)_{s\in\{1,2,3\}}\right) &\geq 0. \end{aligned}$$

Un *equilibrio competitivo* de la economía $\mathcal{E}$ es dado por un vector de precios $(\overline{p}_0, \overline{q})$ junto con planes de consumo y posiciones financieras $\left(\left(\overline{x}_0^i, (\overline{x}_s^i)_{s\in\{1,2,3\}}\right), \overline{z}^i\right)_{i\in\{1,2\}}$, tales que:

(i) Para cada individuo $i \in \{1,2\}$, $\left(\left(\overline{x}_0^i, (\overline{x}_s^i)_{s\in\{1,2,3\}}\right), \overline{z}^i\right)$ es presupuestariamente factible a precios $(\overline{p}_0, \overline{q})$.

(ii) Para cada $i \in \{1,2\}$, y para todo plan de consumo $\left(x_0^i, (x_s^i)_{s\in\{1,2,3\}}\right)$ presupuestariamente factible a precios $(\overline{p}_0, \overline{q})$, $U^i\left(\overline{x}_0^i, (\overline{x}_s^i)_{s\in\{1,2,3\}}\right) \geq U^i\left(x_0^i, (x_s^i)_{s\in\{1,2,3\}}\right)$.

(iii) La oferta se iguala a la demanda, $\sum_{i\in\{1,2\}}\left(\overline{x}_s^i - w_s^i\right) = 0, \quad \forall s \in \{0,1,2,3\}$.

Demuestre las siguientes afirmaciones:

(1) *En equilibrio, las restricciones presupuestarias se cumplen con igualdad.*

(2) *En equilibrio,* $\overline{q} > 0$ *y* $\overline{z}^1 + \overline{z}^2 = 0$.

(3) *Si* $R_1 \neq R_2$*, los individuos observan la incertidumbre.*

(4) *Existe* $M > 0$ *tal que, si* $\left(\overline{x}_0^i, (\overline{x}_s^i)_{s\in\{1,2,3\}}\right)$ *satisface la condición (iii) de la definición de equilibrio, entonces* $\overline{x}_s^i \in [0, M)$*, para cada* $(i,s) \in \{1,2\} \times \{0,1,2,3\}$.

(5) *Existe* $\alpha > 0$ *(que depende de* M*) tal que, en cualquier equilibrio*

$$\left[(\overline{p}_0, \overline{q}), \left(\left(\overline{x}_0^i, (\overline{x}_s^i)_{s\in\{1,2,3\}}\right), \overline{z}^i\right)_{i\in\{1,2\}}\right],$$

tenemos que $\overline{z}^i \in (-\alpha, \alpha)$*, para cada* $i \in \{1,2\}$.

Sea $\Delta = \{(p_0, q) \in \mathbb{R}^2_+ : p_0 + q = 1\}$ y $K = [0, M] \times [-\alpha, \alpha]$. Para cada $i \in \{1,2\}$, considere la correspondencia $B^i : \Delta \twoheadrightarrow K$ que asocia a cada vector $(p_0, q) \in \Delta$ el conjunto de planes $\left(x_0^i, z^i\right) \in K$ que satisfacen la restricción $p_0 x_0^i + q z^i \leq p_0 w_0^i$.

(6) *Para cada* $i \in \{1,2\}$, *la correspondencia* B^i *tiene gráfico cerrado y valores compactos, convexos y diferentes de vacío.*

(7) *Para cada* $i \in \{1,2\}$, *la correspondencia* B^i *es continua.*

(8) *Para cada* $i \in \{1,2\}$, *la correspondencia* $\Gamma^i : \Delta \twoheadrightarrow K$ *definida por*

$$\Gamma^i(p_0, q) = Argmax_{(x_0^i, z^i) \in B^i(p_0,q)} \; U^i\left(x_0^i, (w_s^i + R_s z^i)_{s \in \{1,2,3\}}\right)$$

es univaluada y continua.

(9) *La correspondencia* $\Omega : K^2 \twoheadrightarrow \Delta$ *definida por*

$$\Omega\left((x_0^i, z^i)_{i \in \{1,2\}}\right) = Argmax_{(p_0,q) \in \Delta} \; p_0 \sum_{i \in \{1,2\}} (x_0^i - w_0^i) + q \sum_{i \in \{1,2\}} z^i$$

es hemicontinua superior y tiene valores compactos, convexos y diferentes de vacío.

(10) $\Psi : K^2 \times \Delta \twoheadrightarrow K^2 \times \Delta$, *que asocia a cada* $\left((x_0^i, z^i)_{i \in \{1,2\}}, (p_0, q)\right) \in K^2 \times \Delta$ *el conjunto* $\Gamma^1(p_0, q) \times \Gamma^2(p_0, q) \times \Omega\left((x_0^i, z^i)_{i \in \{1,2\}}\right)$, *es hemicontinua superior con valores compactos, convexos y diferentes de vacío.*

(11) *La correspondencia* Ψ *tiene al menos un punto fijo.*

(12) *Dado un punto fijo* $\left((\overline{x}_0^i, \overline{z}^i)_{i \in \{1,2\}}, (\overline{p}_0, \overline{q})\right) \in K^2 \times \Delta$ *de la correspondencia* Ψ, *tenemos que*

$$\sum_{i \in \{1,2\}} \left(\overline{x}_0^i - w_0^i, \overline{z}^i\right) = 0.$$

(13) *Dado un punto fijo* $\left((\overline{x}_0^i, \overline{z}^i)_{i \in \{1,2\}}, (\overline{p}_0, \overline{q})\right) \in K^2 \times \Delta$ *de la correspondencia* Ψ, *para cada* $s \in \{1,2,3\}$, *sea* $\overline{x}_s^i = w_s^i + R_s \overline{z}^i$, *donde* $i \in \{1,2\}$. *Entonces,*

$$\left[(\overline{p}_0, \overline{q}), \left(\left(\overline{x}_0^i, (\overline{x}_s^i)_{s \in \{1,2,3\}}\right), \overline{z}^i\right)_{i \in \{1,2\}}\right],$$

es un equilibrio de la economía $\mathcal{E}$.

(14) *Suponga que los individuos descuentan el futuro de forma heterogénea (esto es, utilizan "*β*" diferentes). Pregunta: Aún existe equilibrio en la economía?*

CAPITULO VI

Eficiencia de Pareto y Teoremas de Bienestar Social

Considere una economía con m consumidores y n mercancías. Al igual que en las secciones previas, las mercancías son perfectamente divisibles y los individuos tienen preferencias representables por funciones de utilidad continuas y cuasicóncavas, $(u^i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R})_{i\in\{1,\dots,m\}}$. La oferta agregada de recursos en la economía es dada por un vector $W \in \mathbb{R}^n_{++}$.

En este contexto, llamaremos *distribución de recursos* a cualquier familia de asignaciones individuales $(x^i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$, donde el consumidor i recibe $x^i \in \mathbb{R}^n_+$.

Definición 12. Una distribución de recursos $(x^i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ es *factible* si las asignaciones individuales son compatibles con la oferta del mercado, $\sum_{i=1}^m x^i \leq W$. Una asignación $(x^i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ es *Pareto eficiente* si es factible y no existe otra distribución de recursos factible, $(y^i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ tal que $u^i(y^i) \geq u^i(x^i)$ para cada individuo i, con desigualdad estricta para al menos uno de ellos.

Dicho de otra forma, una distribución de recursos es Pareto eficiente si es compatible con la oferta del mercado y nadie puede mejorar su situación, através de una redistribución de las mercancías, sin perjudicar a otro individuo.

Pareto eficiencia es un criterio de eficiencia distributiva que no depende de las asignaciones iniciales de recursos de cada individuo y que nada tiene que ver con *justicia* o *equidad*. De hecho, asignarle todos los recursos de la economía a un único individuo es siempre Pareto eficiente, a pesar de injusto (según muchas perspectivas) y altamente poco equitativo.

Sin embargo, la propiedad de Pareto eficiencia es lo mínimo que deberíamos pedirle a un planificador central que, teniendo información completa sobre las características de los diferentes consumidores, busca distribuirles los recursos existentes de una forma centralizada y "justa".

Note que una asignación $(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ es Pareto eficiente si y solo si, para cada individuo $i \in \{1,\dots,m\}$, la asignación $\overline{x}^i$ es una solución del problema

$$\begin{array}{ll} \max & u^i(y^i) \\ (y^j)_{j\in\{1,\dots,m\}} \in (\mathbb{R}^n_+)^m & u^j(y^j) \geq u^j(\overline{x}^j), \quad \forall j \neq i \\ & \sum_j y^j \leq W \end{array}$$

Como consecuencia, si la asignación Pareto eficiente es interior y las utilidades de los individuos son diferenciables entonces las *tasas marginales de sustitución* de los individuos entre cualquier par de mercancías deben coincidir. Esto es,

$$\frac{\frac{\partial u^i}{\partial x_k}(\overline{x}^i)}{\frac{\partial u^i}{\partial x_l}(\overline{x}^i)} = \frac{\frac{\partial u^j}{\partial x_k}(\overline{x}^j)}{\frac{\partial u^j}{\partial x_l}(\overline{x}^j)}, \quad \forall i, j, k, l.$$

Así, cuando los individuos tengan preferencias estrictamente monótonas y $(m, n) = (2, 2)$, podremos encontrar las asignaciones Pareto eficientes interiores, $(\overline{x}^1, \overline{x}^2)$, al resolver la ecuación:

$$\frac{\frac{\partial u^1}{\partial x_1}(\overline{x}^1)}{\frac{\partial u^1}{\partial x_2}(\overline{x}^1)} = \frac{\frac{\partial u^2}{\partial x_1}(W - \overline{x}^1)}{\frac{\partial u^2}{\partial x_2}(W - \overline{x}^1)}.$$

El conjunto de todas las asignaciones Pareto eficientes en una economía con $(m, n) = (2, 2)$ es llamado de *curva de contrato*.

Ejemplo 6. En el contexto de la economía del Ejemplo 1, afirmamos que $((1, 1); (0, 0))$ y $((0, 0); (1, 1))$ son asignaciones Pareto eficientes.

Como los dos individuos tienen las mismas preferencias, para encontrar las distribuciones de recursos Pareto eficientes e interiores es suficiente resolver:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(\overline{x}_1^1, \overline{x}_2^1)}{\frac{\partial u}{\partial x_2}(\overline{x}^1, \overline{x}_2^1)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}\left((1, 1) - (\overline{x}_1^1, \overline{x}_2^1)\right)}{\frac{\partial u}{\partial x_2}\left((1, 1) - (\overline{x}_1^1, \overline{x}_2^1)\right)},$$

donde $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Esto es, queremos encontrar los puntos $(\overline{x}_1^1, \overline{x}_2^1)$ tal que,

$$\frac{\overline{x}_2^1}{\overline{x}_1^1} = \frac{1 - \overline{x}_2^1}{1 - \overline{x}_1^1}.$$

Concluimos que la curva de contrato es el lugar geométrico, dentro la caja de Edgeworth, constituido por las asignaciones $((\alpha, \alpha); (1 - \alpha, 1 - \alpha))$, donde $\alpha \in [0, 1]$. □

Note que las asignaciones individuales de equilibrio de la economía del Ejemplo 1 constituyen una distribución de recursos Pareto eficiente.

Equilibrio Walrasiano y Pareto eficiencia

El mecanismo distributivo descentralizado de una economía Walrasiana de intercambio nos lleva a asignaciones de recursos Pareto eficientes.[8] Esto es, el mecanismo de mercado

[8] Recuerde que estamos asumiendo que no existe ningún tipo de imperfección de mercado. Por ejemplo, el equilibrio Walrasiano puede dejar de ser Pareto eficiente en economías donde los individuos tienen costos de transacción o no tienen acceso a todos los mercados de intercambio.

Walrasiano satisface condiciones mínimas de eficiencia distributiva.

Primer Teorema del Bienestar Social

Considere una economía de intercambio con m consumidores y n mercancías. Suponga que las mercancías son perfectamente divisibles y que las preferencias de cada individuo son racionales, continuas, convexas y localmente no-saciables. Además, asuma que $\sum_{i=1}^{m} w^i \gg 0$, donde $w^i \in \mathbb{R}^n_+$ es la asignación inicial de recursos del individuo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces,

$$\left[(\overline{p}; (\overline{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}) \text{ equilibrio Walrasiano}\right] \implies \left[(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}} \text{ Pareto eficiente}\right]$$

Demostración. Sean $(u^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ funciones de utilidad que representan las preferencias. Suponga que $(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ no es Pareto eficiente. Entonces, existe $(y^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ factible, tal que $u^i(y^i) \geq u^i(\overline{x}^i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, con por lo menos una de las desigualdades estricta. Caso no todas las desigualdades sean estrictas, sin perdida de generalidad, va a existir $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ tal que $u^i(y^i) > u^i(\overline{x}^i)$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, y $u^i(y^i) = u^i(\overline{x}^i)$, para todo consumidor $i \in \{k+1, \ldots, m\}$. Como las preferencias son localmente no-saciables y continuas siempre existen vectores $\{v_{k+1}, \ldots, v_m\}$ tales que: (i) $u^i\left(y^i - \frac{1}{k}\sum_{j=k+1}^{m} v^j\right) > u^i(\overline{x}^i)$, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$; (ii) $u^i(y^i + v^i) > u^i(\overline{x}^i)$, $\forall i \in \{k+1, \ldots, m\}$. Esto es, podemos encontrar otra asignación factible en que *todos* los consumidores mejoran su situación.

Por lo tanto, si $(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ no es Pareto eficiente, entonces existe $(\tilde{y}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ factible, tal que $u^i(\tilde{y}^i) > u^i(\overline{x}^i)$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$. Por lo tanto, dada la optimalidad de las canastas $(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$, tenemos que $\overline{p} \cdot \tilde{y}^i > \overline{p} \cdot w^i$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$. Luego,

$$\overline{p} \cdot \sum_{i=1}^{m} \tilde{y}^i > \overline{p} \cdot \sum_{i=1}^{m} w^i \geq \overline{p} \cdot \sum_{i=1}^{m} \tilde{y}^i,$$

donde la última desigualdad es una consecuencia de la factibilidad de $(\tilde{y}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$. Llegamos así a una contradicción. $\square$

Ejemplo 7. Considere la economía de los Ejemplos 1 y 6, pero asuma que los individuos tienen asignaciones iniciales $w^1 = (0,7; 0,4)$ y $w^2 = (0,3; 0,6)$. Entonces, sigue del Primer Teorema del Bienestar Social que, si existe un equilibrio Walrasiano las asignaciones individuales tienen que ser Pareto eficientes. Esto es, en caso de existir un equilibrio, las asignaciones tienen la forma $((\alpha, \alpha); (1-\alpha, 1-\alpha))$, donde $\alpha \in [0, 1]$. Normalice la suma de los precios igual a uno. Entonces, monotonía estricta de las preferencias junto con factibilidad presupuestaria de la asignación del individuo $i = 1$ implica que $\alpha = 0,4 + 0,3p_1$. Además, las tasas marginales de sustitución tiene que ser iguales a la tasas de sustitución de mercado. Esto es, $1 = \frac{p_1}{p_2}$. Concluimos que los precios de equilibrio son $\overline{p} = (0,5; 0,5)$ y las asignaciones óptimas $((0,55; 0,55); (0,45, ; 0,45))$. $\square$

Finalmente, es natural preguntarse si las distribuciones de recursos Pareto eficientes pueden implementarse con un mecanismo descentralizado de mercado, por ejemplo, con el mecanismo Walrasiano.

Fije una economía con m agentes y n bienes, donde cada individuo i tiene una asignación inicial de recursos w^i. Nos interesa saber si, dada una asignación Pareto eficiente, existen precios que hacen de ella un equilibrio Walrasiano.

La respuesta es inmediata: No. Por ejemplo, considere la economía del Ejemplo 1. La asignación $((0,3; 0,3); (0,7; 0,7))$ es Pareto eficiente, mientras la única asignación de equilibrio Walrasiano es $((0,5; 0,5); (0,5; 0,5))$. El punto fundamental es que la pregunta no está bien planteada, pues existen en general infinitas asignaciones Pareto eficientes, incluso en modelos donde el equilibrio Walrasiano es único.

Por lo tanto, sería mas prudente preguntarnos si existe algún mecanismo que permite modificar la economía para garantizar que el equilibrio Walrasiano coincide con la asignación Pareto eficiente pre-fijada. En este caso, la respuesta es afirmativa, y el mecanismo que permite modificar la economía, hasta implementar la asignación Pareto eficiente como un equilibrio, es la trasferencia de renta entre los individuos.

Concentraremos nuestra atención una economía de intercambio con m consumidores y n mercancías. Las mercancías son perfectamente divisibles y que los individuos tienen preferencias racionales, continuas y convexas. Además, $\sum_{i=1}^{m} w^i \gg 0$, donde $w^i \in \mathbb{R}^n_+$ es la asignación inicial de recursos del individuo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Definición 13. Un *equilibrio Walrasiano con transferencias* (EWT) es dado por precios $\overline{p} \in \mathbb{R}^n_+$ y asignaciones individuales $(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ tales que:

(i) Factibilidad de mercado: $\sum_{i=1}^{m} \overline{x}^i \leq \sum_{i=1}^{m} w^i$.

(ii) Optimalidad ex-post: Existe $(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$, con $\sum_{i=1}^{m} t_i \leq 0$, tal que $\overline{x}^i = \overline{x}^i(\overline{p}, \overline{p} \cdot w^i + t_i), \;\; \forall i \in \{1, \ldots, m\}$.

Segundo Teorema del Bienestar Social

Considere una economía de intercambio con m consumidores y n mercancías. Suponga que las mercancías son perfectamente divisibles y que las preferencias de cada individuo son racionales, continuas, convexas y estrictamente monótonas. Entonces,

$$\left[(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}} \gg 0 \,\text{Pareto Eficiente}\right] \implies \exists\,\overline{p}\in\mathbb{R}^n_+ : \left[(\overline{p};(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}})\,\text{es un EWT}\right]$$

Demostración. Note que es suficiente probar que existe $\overline{p}\in\mathbb{R}^n_+$ tal que

$$\forall i\in\{1,\ldots,m\} : u^i(x^i) > u^i(\overline{x}^i) \Longrightarrow \overline{p}\cdot x^i > \overline{p}\cdot\overline{x}^i.$$

De hecho, en este caso $(\overline{p};(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}})$ es un equilibrio con transferencias, las cuales son dadas por $\overline{t}^i = \overline{p}\cdot\overline{x}^i - \overline{p}\cdot w^i$, $\forall i\in\{1,\ldots,m\}$.

Sean $(u^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ funciones de utilidad que representan las preferencias de los individuos. Defina el conjunto

$$A = \left\{\sum_{i=1}^m x^i\in\mathbb{R}^n_+ : \forall i\in\{1,\ldots,m\},\, u^i(x^i) > u^i(\overline{x}^i)\right\}.$$

La convexidad de las preferencias nos asegura que el conjunto A es convexo. Además, como $(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ es Pareto eficiente, $\sum_{i=1}^m w^i\notin A$. Por lo tanto, el Teorema de Separación de Convexos implica la existencia de un vector $\overline{p}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ tal que,

$$\overline{p}\cdot\sum_{i=1}^m\overline{x}^i = \overline{p}\cdot\sum_{i=1}^m w^i \le \overline{p}\cdot z,\,\forall z\in A,$$

donde la primera igualdad viene de la monotonia de las preferencias. Además, como las preferencias son estrictamente monótonas, para cada $l\in\{1,\ldots,n\}$, $z=\sum_{i=1}^m(\overline{x}^i+\frac{1}{m}e_l)\in A$, donde e_l es la canasta que solo contiene una unidad de la mercancía l. Sigue que $\overline{p}\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}$.

Suponga que para algún individuo $i\in\{1,\ldots,m\}$ existe $x^i\in\mathbb{R}^n_+$ tal que $u^i(x^i)>u^i(\overline{x}^i)$. Entonces, para $\theta\in(0,1)$ suficientemente cerca de uno, $u^i(\theta x^i)>u^i(\overline{x}^i)$ y, para cada individuo $j\neq i$, $u^j(\overline{x}^j+\frac{1-\theta}{m-1}x^i)>u^j(\overline{x}^j)$. Luego, $\overline{p}\cdot x^i\ge\overline{p}\cdot\overline{x}^i$. Por lo tanto, suponga que $\overline{p}\cdot x^i=\overline{p}\cdot\overline{x}^i$. La continuidad de las preferencias nos asegura que existe $\theta\in(0,1)$ tal que $u^i(\theta x^i)>u^i(\overline{x}^i)$. Luego, $\overline{p}\cdot\theta x^i\ge\overline{p}\cdot\overline{x}^i=\overline{p}\cdot x^i$. Lo cual es una contradicción, ya que $\overline{x}^i\gg 0$. Esto completa la demostración. □

Note que, bajo las condiciones del teorema, para implementar una asignación Pareto eficiente un planificador central necesitará conocer las transferencias de renta que debe hacer entre los individuos. Por ejemplo, para obtener a través del mecanismo Walrasiano la distribución de recursos Pareto eficiente $(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ podría trasferirle (quitarle) al individuo i una cantidad $\bar{t}_i = \overline{p}\cdot(\overline{x}^i - w^i)$. De hecho, la suma de las transferencia así definidas es menor o igual a cero (el planificador no le agrega recursos a la economía) y cada individuo i queda con una renta igual al valor de mercado de la asignación $\overline{x}^i$. Como $(\overline{x}^i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ es Pareto eficiente y las preferencias son estrictamente convexas, independiente de los precios (por ejemplo, cuando $p = \overline{p}$) cada individuo i va a demandar la asignación $\overline{x}^i$.[9] El problema es que para conocer $(\bar{t}_i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ se puede requerir adelantar los precios de equilibrio y conocer las asignaciones individuales.

Alternativamente, se podría pensar que el planificador le embarga la asignación inicial a cada individuo i entregándole a cambio la asignación $\overline{x}^i$. En este caso, no es necesario conocer los precios $\overline{p}$, ya que la Pareto eficiencia y el Primer Teorema del Bienestar Social garantizan que los individuos van a consumir su "nueva" asignación de mercancías. No obstante, para embargar las asignaciones iniciales el planificador debe conocerlas, caso contrario, los individuos tendrían incentivos para esconder la riqueza.

En cualquier caso, la implementación del Segundo Teorema del Bienestar requiere hipótesis muy restrictivas sobre el grado de conocimiento que el planificador tiene de las características de los consumidores.

Ejercicios

(1) Considere una economia con n agentes cuyas preferencias son idénticas y representables por una función de utilidad estrictamente cóncava. Hay m mercancías y la canasta de recursos agregados es $W \in \mathbb{R}^m_{++}$. Muestre detalladamente que dividir los recursos equitativamente entre los individuos es una asignación Pareto eficiente.

(2) Cuando los mercados financieros son incompletos ($S > 1$), los equilibrios competitivos no necesariamente son Pareto eficientes. Ilustrar esta posibilidad es el objetivo de este ejercicio.

Suponga, con la notación del ejercicio sobre mercados incompletos del capítulo anterior, que $S = 3$, $m = 2$, $R_1 = 1$, $R_2 = R_3 = 0$, $(w_0^1; w_1^1; w_2^1; w_3^1) = (1; 1; 0,25; 0,75)$, $(w_0^2; w_1^2; w_2^2; w_3^2) = (1; 1; 0,75; 0,25)$, $(\pi_1^1; \pi_2^1; \pi_3^1) = (\pi_1^2; \pi_2^2; \pi_3^2) = (0,5; 0,25; 0,25)$, $u^1(x) = u^2(x) = \sqrt{x}$.

Muestre que, cualquier distribución de recursos asociada a un equilibrio puede ser Pareto dominada, redistribuyendo recursos solamente entre los estados $s = 2$ y $s = 3$.

[9] Pruebe esta última afirmación.

(3) Considere una economía con dos consumidores y dos bienes. Uno de los individuos tiene preferencias representables por la función de utilidad $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. En cierta asignación Pareto eficiente x^* este consumidor recibe la canasta $(10, 5)$. Suponga que existen precios competitivos que soportan x^* como equilibrio Walrasiano. Encuéntrelos.

(4) Considere una economía de intercambio estática, donde las preferencias de los individuos son estrictamente monótonas, estrictamente convexas y representadas por las funciones de utilidad $(u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot))$. Demuestre que, dado $(s_1, \dots, s_n) \gg 0$, existe a lo más una asignación Pareto eficiente $(x_1, \dots, , x_n)$ tal que, $(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n))$ es proporcional a $(s_1, \dots, s_n)$.

(5) Considere una economía de intercambio estática con $2n + 1$ consumidores. Existen dos mercancías indivisibles, zapatos derechos (D) y zapatos izquierdos (I). Existen n zapatos izquierdos y $n + 1$ zapatos derechos. Todos los individuos tienen la misma función de utilidad $u(I, D) = \min\{I, D\}$. Encuentre el conjunto de asignaciones Pareto eficientes.

(6) Considere una economía de intercambio, donde un planificador central impone un límite exógeno a la cantidad que cada consumidor puede demandar de una cierta mercancía. ¿Podemos afirmar que el equilibrio Walrasiano será Pareto eficiente? Justifique detalladamente su respuesta.

Referencias Bibliográficas

Advanced Mathematical Economics
Rakesh Vohra, Routledge, New York.

Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory
Kim C. Border, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom.

Introduction to Analysis
Maxwell Rosenlicht, Dover Publications, New York.

Microeconomic Theory
Andreu Mascolell, Michael D. Whinston and Jerry R. Green, Oxford University Press.

Recursive Methods in Economic Dynamics
Stokey, Lucas and Prescott, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, USA.