# UN MODELO ESTOCÁSTICO PARA ASIGNAR PRECIOS DE BONOS*

**Rolando Rebolledo****

## SÍNTESIS

En este trabajo se propone e ilustra un método de valoración en el caso de los bonos. El concepto **generador de precios** se vincula con precios normalizados por medio de una operación exponencial. La derivación de la solución general para la ecuación de precios se da primero en el caso de tiempo discreto a manera de introducción para luego ampliarla al caso del tiempo continuo. En la última sección, se analiza el **no arbitraje** de oportunidades. La nota se basa en una reciente investigación conjunta del autor llevada a cabo con Eckhard Platen, la que generaliza la mayoría de los modelos de valoración vigentes en los mercados financieros (veáse Platen y Rebolledo, 1993 y 1994).

## ABSTRACT

In this article a general method for pricing is proposed and illustrated in the case of bonds. The concept of **price generator** is connected with normalized prices by means of an exponential operation. The derivation of the general solution to the price equation is given first in the case of discrete time as an introduction and then extended to the case of continuous time. In the last section, the **no arbitrage** of opportunities is analyzed. The note is based on a recent joint research of the author with Eckhard Platen which generalizes most of current models of pricing in financial markets (see Platen y Rebolledo, 1993, 1994).

* Investigación financiada parcialmente por Proyecto FONDECYT 1930528.

** Profesor, Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile. El autor agradece el estímulo y los interesantes comentarios sobre aspectos propios de finanzas que le han sido formulados por Gonzalo Cortázar.

# UN MODELO ESTOCÁSTICO PARA ASIGNAR PRECIOS DE BONOS*

**Rolando Rebolledo**

En este trabajo se construye un modelo general para determinar precios de bonos, siguiendo la teoría desarrollada en Platen y Rebolledo (1993, 1994). En este enfoque se aprovecha el formalismo de las ecuaciones diferenciales propias de la *mecánica estocástica*, basado en seis supuestos básicos inspirados de la práctica y que detallamos a continuación.

## 1. LOS SUPUESTOS BÁSICOS

Sea $P(T) = (P_t(T);\ 0 \leq t \leq T)$ el proceso estocástico que nos da el **precio de un bono** cuya madurez se alcanza en el tiempo $T$. Vale decir, al llegar a $T$ el precio del bono alcanza el valor final 1. Para describir su evolución introducimos **la tasa de retorno esperado** $\mu(\mathrm{T}) = (\mu_t(\mathrm{T});\ 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T})$ y **la volatilidad** debida al mercado $\sigma(T) = (\sigma_t(T);\ 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T})$.

Se acostumbra modelar la dinámica de $P(T)$ por métodos similares a los introducidos por Black y Scholes (1973). Sin embargo, los modelos construidos de esta forma hasta ahora, adolecen de múltiples fallas. Ellas tienen diversas causas. Una, muy frecuente, consiste en suponer que tanto $\mu(T)$ como $\sigma(T)$ son deterministas (funciones del tiempo no aleatorias). Sin embargo, un análisis estadístico de los precios reales muestra que dicha suposición no tiene fundamento.

Otra dificultad al construir el modelo proviene del hecho de que $P(T)$ debe alcanzar un *valor final* dado. Pero, cuando se plantea una ecuación en el estilo de Black y Scholes (1973), es necesario fijar un *valor inicial*. Esto ha motivado que varios autores intenten aproximaciones al problema mediante ecuaciones con valores de frontera que se introducen de manera muy artificial. Este es el caso de Ball y Torous (1983). Cabe hacer notar que la varianza del precio del bono debe anularse al llegar a madurez, sin embargo en el modelo de los autores recién citados ella permanece constante.

***Estudios de Economía**, publicación del Departmento de Economía de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas de la Universidad de Chile, vol. 21, n°1, junio 1994.

Digamos entonces que los primeros supuestos básicos en la modelación del precios de bonos son:

(i) La tasa de retorno esperado y la volatilidad son procesos estocásticos.

(ii) El precio del bono es estrictamente positivo y aproxima su valor final al llegar a la madurez.

(iii) La varianza del precio se hace cero cuando se llega a la madurez.

Los tres supuestos anteriores son los que permiten establecer la ecuación fundamental que describe la dinámica de los precios. Enseguida, es importante estudiar relaciones de equilibrio conectadas con otros activos. Existen diversas nociones de equilibrio conectadas con la dinámica de los diferentes activos. Interesa, entre otras, la expresión de no arbitraje de oportunidades. Para tal efecto, proveemos de conceptos matemáticos adaptados a la formulación de conceptos de no arbitraje e ilustramos su utilización tomando algunas definiciones posibles de tal concepto financiero.

Así por ejemplo, para que no haya arbitraje de oportunidades, un precio de bono realista debiera satisfacer:

(iv) El retorno asociado a un bono que llega a madurez es igual al retorno esperado de una cuenta de ahorro que paga continuamente la tasa de interés instantáneo.

Pero además, bajo condiciones de no arbitraje, un modelo realista de bono debiera dar cuenta de cambios que sobrevengan en el riesgo de la operación. Vale decir:

(v) Un precio de bono realista debiera considerar una medida de los cambios que puedan sobrevenir en el riesgo. Por último,

(vi) Al descontar por un bono un activo cuya tasa de retorno esperado sea igual a la tasa de interés, debiera obtenerse un proceso con crecimiento esperado nulo

## 2. LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL Y SU SOLUCIÓN EXPLÍCITA

Para construir un modelo de precios que satisfaga los postulados (i) a (vi) anteriores, comenzaremos por introducir algunas notaciones y convenciones usuales en la Teoría de Procesos Estocásticos. El precio de madurez $T$ es un proceso estocástico $P(T) = P_t(T); t \geq 0)$ definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, F,$

$\mathbb{P}$). Para entender el mecanismo de generación de la ecuación fundamental, supongamos primero que el tiempo $t$ se mueve sobre los enteros.

## 2.1. Deducción de la ecuación fundamental en el caso del tiempo discreto

Suponemos entonces que $P(T) = (P_t(T);\ t \in \mathbb{N})$. La idea básica es que si observamos lo que ocurrirá entre un instante dado $t$ y el tiempo de madurez $T$, el precio debe poder calcularse como su valor al alcanzar la madurez (vale decir 1) menos el retorno esperado y menos la volatilidad que afecta el retorno por efecto de la interacción del mercado. En consecuencia,

$$P_t\,(T) = 1 - \sum_{s=t}^{T} \mu_s(T)\, P_s(T) - \sum_{s=t}^{T} \sigma_s(T) P_s(T) \xi_s\,, \tag{1}$$

donde $\mu(T)$ es la tasa de retorno esperado y $\sigma(T)$ es el coeficiente de volatilidad. Los términos $\xi_S$ suponemos que son gaussianos, independientes, de media 0 y varianza 1.

Llamemos $F_t$ la familia de los sucesos que se conocen hasta el tiempo $t$ (el flujo de información) y por $\mathbb{E}(./F_t)$ la correspondiente media o esperanza condicional, entonces $\mu_t(T)$ y $\sigma_t(T)$ tienen las siguientes interpretaciones:

$$\mu_t(T) = \mathbb{E}\left(\frac{P_{t+1}(T) - P_t(T)}{P_t(T)}\ /\ F_t\right), \tag{2}$$

$$\sigma_t^2(T) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{P_{t+1}(T) - P_t(T)}{P_t(T)}\right)^2 /\ F_t\right], \tag{3}$$

puesto que $\xi_t$ es independiente de $F_t$ y tiene media 0 y varianza 1.

La relación (2) traduce el hecho que $\mu(T)$ es la tasa de retorno esperado y (3), que $\sigma^2(T)$ es su varianza condicional.

La ecuación fundamental (1) presenta varias particularidades importantes de destacar. En primer lugar, si $t = T$, tenemos obviamente $P_T(T) = 1$, cumpliendo el modelo con asignar al bono su valor final al llegar a la madurez. Pero la ecuación involucra en el tiempo $t \leq T$ valores que se sitúan en el *futuro* más allá de $t$. Decimos que la ecuación contiene términos anticipativos. Para salvar esta dificultad, normalizamos el precio descontándolo por su valor inicial:

$$Z_t(T) = \frac{P_t(T)}{P_0(T)}, \ (t \leq T). \tag{4}$$

El precio normalizado $Z(T)$ satisface una relación que es más fácil de manejar como veremos a continuación.

En efecto, escribamos la ecuación (1) para $t = 0$:

$$P_0(T) = 1 - \sum_{s=0}^{T} \mu_s(T)\, P_s(T) - \sum_{s=0}^{T} \sigma_s(T)\, P_s(T)\, \xi_s\,, \tag{5}$$

y ahora despejemos el valor 1 que aparece en (5) para reemplazarlo en (1):

$$P_t(T) = P_0(T) + \sum_{s=0}^{T} \mu_s(T)\, P_s(T) + \sum_{s=0}^{T} \sigma_s(T)\, P_s(T)\, \xi_s$$

$$- \sum_{s=t}^{T} \mu_s(T)\, P_s(T) - \sum_{s=t}^{T} \sigma_s(T)\, P_s(T) \xi_s\,,$$

de donde, cancelando términos en las sumas y dividiendo por $P_0(T)$, se llega fácilmente a la ecuación que $Z\,(T)$ debe satisfacer:

$$Z_t = 1 + \sum_{s=0}^{t-1} \mu_s(T)\, Z_s(T) + \sum_{s=0}^{t-1} \sigma_s(T)\, Z_s(T)\, \xi_s\,,\ (t \leq T). \tag{6}$$

Esta vez, la ecuación no involucra términos anticipativos. Es más, ella puede ser resuelta secuencialmente como sigue:

$$\zeta_t = \mu_t(T) + \sigma_t(T)\xi_t\,,\ S_t = \sum_{r=0}^{t} \zeta_r\,,\ (t \leq T).$$

Entonces la ecuación (6) se escribe:

$$Z_t(T) = 1 + \sum_{s=0}^{t-} Z_s(T)\zeta_s\,,\ (t \leq T)\,. \tag{7}$$

El proceso $S$ lo llamaremos generador de precios. La razón de este nombre quedará clara en el procedimiento de construcción de $Z(T)$, el precio normalizado, que ahora veremos. En primer lugar, debemos tener $Z_0(T) = 1$, luego:

$$
\begin{aligned}
Z_0(T) &= 1 \\
Z_1(T) &= 1 + Z_0(T)\,\zeta_0 = 1 + \zeta_0 \\
Z_2(T) &= 1 + Z_0(T)\,\zeta_0 + Z_1(T)\,\zeta_1 \\
&= (1 + \zeta_0)(1 + \zeta_1) \\
&\dots \\
Z_t(T) &= (1 + \zeta_0)(1 + \zeta_1)(1 + \zeta_2) \dots (1 + \zeta_{t-1}).
\end{aligned}
$$

De modo que

$$
Z_t(T) = \prod_{s=0}^{t-1} (1 + \zeta_s) \,,\; (1 \leq t \leq T) \,, \tag{8}
$$

es la solución (6) y la expresión de $P(T)$ puede ser deducida de ella, recordando que $Z_T(T) = 1/P_0(T)$ y $Z_t(T) = P_t(T)/\,P_0(T)$ para $t \leq T$:

$$
P_t(T) = \prod_{s=t}^{T} (1 + \zeta_s),\; (t \leq T) \,. \tag{9}
$$

Estudiemos un poco más la estructura de $Z(T)$. Dado un proceso $X = (X_t;\, t \in \mathbb{N})$, introduzcamos las notaciones

$$
\Delta X_t = X_t - X_{t-1} \;;\; \varepsilon\,(X)_t = \prod_{s=0}^{t-1} (1 + \Delta X_s) \,,\; (t \leq T).
$$

Se puede observar entonces que $\varepsilon(X)$ resuelve la ecuación

$$
\varepsilon(X)_t = 1 + \sum_{s=0}^{t-1} \varepsilon(X)_s \Delta X_s \,, \tag{10}
$$

que se puede comparar con (6). Veremos que la operación que consiste en calcular $\varepsilon(X)$ se la podemos aplicar a cualquier proceso con tiempo discreto. Se tiene que $Z(T) = \varepsilon(S)$, donde $S$ es el generador de precios y $S \longmapsto \varepsilon(S)$ es el mecanismo que permite fijar los precios.

A continuación, veremos cómo se puede extender lo anterior al caso del tiempo continuo.

## 2.2. La ecuación fundamental para tiempo continuo

La principal diferencia con el caso del tiempo discreto es que las variables $\xi_s$ deben ahora ser reemplazadas por incrementos de un proceso Wiener. Evidentemente, nuestras sumas anteriores devienen integrales y el mismo razonamiento que nos llevó a escribir (1) nos permite deducir que

$$P_t(T) = 1 - \int_t^T \mu_s(T)P_s(T)ds - \int_t^T \sigma_s(T)P_s(T)dW_s \, , \tag{11}$$

donde $W$ representa el proceso de Wiener (movimiento Browniano) que permite modelar la aleatoriedad debido a la interacción del mercado.

Los coeficientes $\mu(T)$ y $\sigma(T)$ siguen teniendo la misma interpretación que en el caso anterior, salvo que su expresión matemática es un poco más compleja:

$$\mu_t(T) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} IE\left(\frac{P_{t+h}(T) - P_t(T)}{P_t(T)} \Big/ F_t\right), \ (t \geq 0) \, , \tag{12}$$

es la tasa de retorno esperado y su segundo momento es la volatilidad

$$\sigma_t^2(T) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} IE\left[\left(\frac{P_{t+h}(T) - P_t(T)}{P_t(T)}\right)^2 \Big/ F_t\right], \ (t \geq 0), \tag{13}$$

donde los límites deben ser interpretados en probabilidad.

Asimismo, el precio normalizado debe satisfacer la ecuación

$$Z_t(T) = 1 + \int_0^t \mu_s(T)Z_s(T)ds + \int_0^t \sigma_s(T)Z_s(T)dW_s \, , \ (t \leq T) \, . \tag{14}$$

El proceso generador de precios es en este caso

$$S_t = \int_0^t \mu_s(T)ds + \int_0^t \sigma_s(T)dW_s \, , \ (t \leq T) \, . \tag{15}$$

Las integrales con respecto a $W$ que aparecen en las expresiones anteriores, son integrales estocásticas con respecto al proceso de Wiener, cuya teoría puede ser consultada en Protter (1990), por ejemplo. Para no recargar el texto con tecnicismos, supondremos que los procesos $\mu(T)$ y $\sigma(T)$ son suficientemente regulares para aplicarles el *cálculo estocástico* usual (en realidad basta suponerlos continuos y adaptados). La expresión que nos da el generador de precios también se puede escribir en un lenguaje de diferenciales:

$$dS_t = \mu_t(T)dt + \sigma_t(T)dW_t ,$$

vale decir, $dS_t$ juega el papel de $\zeta_t$ del caso anterior, de la misma manera que $dW_t$ es la generalización de nuestro $\xi_t$ en el caso del tiempo discreto. Y (14) se escribe también

$$Z_t(T) = 1 + \int_0^t Z_r(T)dS_r \ , \ (t \leq T) \tag{16}$$

Para encontrar la solución de esta ecuación es necesario generalizar la operación $\varepsilon$. En este caso corresponde a (véase por ejemplo, Planten y Rebolledo (1994)):

$$\varepsilon(S)_t = \exp\left( \int_0^t \mu_s(T)ds + \int_0^t \sigma_s(T)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2(T)ds \right) , \ (t \geq 0) \ . \tag{17}$$

Y se tiene

$$Z(T) = \varepsilon(S) \ , \ (t \geq 0) \tag{18}$$

como en el caso del tiempo discreto.

También se acostumbra designar por $[S, S]$ la variación cuadrática del generador de precios, o varianza condicional de la volatilidad acumulada, que corresponde a la expresión

$$[S, S]_t = \int_0^t \sigma_s^2(T)ds ,$$

de modo que $\varepsilon$ también se escribe

$$\varepsilon(S) = \exp\left( S - \frac{1}{2}\,[S, S] \right).$$

La solución explícita de la ecuación fundamental para los precios (no normalizados) es entonces

$$P_t(T) = \exp\left( \int_t^T \mu_s(T)ds - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s(T)^2 ds + \int_t^T \sigma_s(T)dW_s \right) , \ (t \geq 0) \ . \tag{19}$$

Resumiendo, el resultado fundamental de esta sección es

**Teorema 1.** *El precio normalizado Z(T) se calcula mediante la expresión*

$Z(T) = \varepsilon(S)$ ,

*donde S es el generador de precios y $\varepsilon(S)$ se calcula según (8) en el caso del tiempo discreto, respectivamente según (17) en el caso del tiempo continuo.*

*Z(T) es así la solución de la ecuación (6) (resp. (14)) en el caso del tiempo discreto (resp. en el caso del tiempo continuo).*

*Los precios P(T) se calculan entonces según (9) (tiempo discreto), o (19) (tiempo continuo).*

## 3. NO ARBITRAJE

Para discutir los conceptos de no arbitraje se introduce la noción de tasa de crecimiento esperado de un proceso $V = (V_t \,;\, t \geq 0)$ en la forma

$$D_t^+ V = \lim . \, pr_{h>0,\, h \downarrow 0} \frac{1}{h} \, IE(V_{t+h} - V_t \,/\, F_t) \, , \tag{20}$$

cuando el límite (en probabilidad) existe.

Se acostumbra a decir que un proceso cuya tasa de retorno esperado es nula constituye una **martingala**.

El concepto de **no arbitraje** que se introduce a título de ejemplo se refiere a un activo $A$ descontado por un bono de precio normalizado $Z$. Diremos que **no hay arbitraje** si $A/Z$ tiene una tasa de crecimiento esperado nula, vale decir:

$$D_t^+ \left( \frac{A}{Z} \right) = 0 \text{ , para todo } t \, , \tag{21}$$

(equivalentemente, si $A/Z$ es una martingala).

Las consecuencias que esta definición tiene serán analizadas a continuación. Se verá en particular la forma que debe asumir el proceso generador de precios en función de determinados activos, para que no exista arbitraje de oportunidades.

Supongamos que tenemos un activo $A$ que satisface una ecuación de la forma

$$dA_t = \mu_t' A_t dt + \sigma_t' A_t dW_t' \ , \tag{22}$$

donde $W'$ es otro proceso de Wiener, $\mu'$ y $\sigma'$ son procesos adaptados a las familias de sucesos $F_t$. Suponemos que $A_0$ es un valor constante no nulo.

La ecuación (22) es lineal y tiene por solución

$$A_t = A_0 \varepsilon(S')_t \ , \tag{23}$$

donde $S_t' = \int_0^t \mu_s' \, ds + \int_0^t \sigma_s' \, dW_s'$ . Vale decir, $A$ posee también un generador como en el caso del precio $Z(T)$.

$A$ puede ser, por ejemplo, una cuenta de ahorros, un *stock*, o bien otro bono.

El siguiente resultado es una consecuencia de un resultado más general probado en Platen y Rebolledo (1993).

**Teorema 2.** *Bajo las condiciones precedentes se tiene*

*Caso 1. Si $W$ es independiente de $W'$, entonces no hay arbitraje de oportunidades si y sólo si*

$$\int_0^t \left(\mu_s' - \mu_s(T) + \sigma_s(T)^2\right) ds = 0 \ . \tag{24}$$

*Caso 2. Si $W = W'$, entonces no hay arbitraje de oportunidades si y sólo si*

$$\int_0^t \left(\mu_s' - \mu_s(T) + \sigma_s(T)^2\right) ds + \int_0^t \sigma_s' \, \sigma_s(T) \, ds = 0 \ . \tag{25}$$

En el caso 1, en particular, se verificará la condición de no arbitraje si se tiene

$$\mu_s(T) = \mu_s' + \sigma_s(T)^2, \ para \ todo \ s \ ,$$

que muestra además que la tasa de retorno esperado jamás será negativa si el activo $A$ posee una tasa de retorno positiva (que es una suposición razonable en la práctica).

Ilustremos este resultado con un ejemplo importante.

Supongamos que $A$ es una cuenta de ahorros de tasa de interés $r$:

$$A_t = \exp\left( \int_0^t r_s \, ds \right) .$$

Entonces $\mu_t' = r_t$ y $\sigma_t' = 0$ , de modo que las condiciones del caso 1 del teorema se satisfacen en particular si

$$\mu_t (T) = r_t + \sigma_t (T)^2 , \tag{26}$$

y se puede ver que el término $\sigma_t\ (T)^2$ representa una prima de retorno. Corresponde en cierto modo a una medida de la incertidumbre asociada al retorno que el bono produce. Con esta elección de la tasa de retorno esperado y si además se supone que el precio inicial $P_0(T)$ es $F_0$-mediable, se obtiene que

$$P_t(T) = \left\{ IE \left( \exp\left( \int_t^T r_s \, ds\right) / F_t \right) \right\}^{-1} , \tag{27}$$

que es una expresión que otros autores han obtenido con diferentes técnicas y supuestos básicos, para este caso particular (ver por ejemplo Platen (1993)).

## REFERENCIAS


BALL, C.B. y W.N. TOROUS (1983): "Bond Price Dynamics and Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 19, 517-531.

BLACK, F. E., DERMAN, y W. TOY (1990): "A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options," *Financial Analysis Journal*, Vol.1, 33-39.

BLACK , F. y M. SCHOLES (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, 637-659.

BRENNAN, M.J. y E.S. SCHWARTZ (1979): "A Continous Time Approach to the Pricing of Bonds," *Journal of Banking and Finance*, Vol. 3, 133-155.

COX, J.C., J.E. INGERSOLL y S.A. ROSS (1985): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, Vol. 53, 385-407.

DOTHAN, L.U. (1978): "On the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial Economics*, Vol. 6, 59-69.

HARRISON, J.M. y S.R. PLISKA (1983): "A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Complete Markets," *Stochastic Processes and Appl.*, Vol. 15, 313-316.

HEATH, D., R. JARROW y A. MORTON (1992): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, Vol. 60, 77-105.

HO, T.S.Y. y S.B. LEE (1986): "Term Structure Movements and Pricing of Interest Rate Claims," *Journal of Finance*, Vol. 41, 1011-1029.

HULL, J. y A. WHITE (1990): "Pricing Interest Rate Derivative Securities," *The Review of Financial Studies*, Vol. 3, 573-592.

JAMSHIDIAN, F. (1988): "The One-Factor Gaussian Interest Rate Model: Theory and Implementation," Documento de Trabajo, Financial Strategies Gropus, Merril Lynch Capitel Markets.

EL KAROUI, N., R. MYNENI y R. VISWANATHAN (1992): "Arbitrage Pricing and Hedging of Interest Claims with State Variables," Documento de Trabajo, Stanford University.

KLOEDEN, P. y E. PLATEN (1992): *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag..

LONGSTAFF, F.A (1989): "A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial Economics*, Vol. 23, 195-224.

MORTON, A.J. (1988): *Arbitrage and Martingales*. Tesis de doctorado, Cornell University.

PLATEN, E. (1993): "An Approach to Bond Pricing", manuscrito.

PLATEN, E. y R. REBOLLEDO (1993): "On Bond Price Dynamics", Informe Técnico. PUC-FM 93-2

————— (1994): "Pricing Via Anticipative Stochastic Calculus", por aparecer, en *Journal of Applied Probability.*

PROTTER, P. (1990): *Stochastic Integrals and Stochastic Differential Equations. A New Approach.* Springer-Verlag.

REBOLLEDO, R. (1992): "The Role of Weak Topologies in Stochastic Mechanics," In *Proceedings IV CLAPEM*, N°3, 43-60, Caracas. Contribuciones en Prob. y Est. Mat., Ed. Bernoulli-Acta Científica Venezolana.

RICHARD, S. (1978): "An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial Economics*, Vol. 6, 33-57.

SANDMANN K. y D. SONDERMANN (1991): "A term Structure Model and the Pricing of Interest Rate Derivates". Documento de discusión N°B-180.

VASICEK, O.A. (1977): "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, 77-188.